

Universidade Federal do Amapá
Programa de Mestrado
Profissional em Matemática – PROFMAT
Dissertação em mestrado

Edvan Pureza Jacques

**Construindo o conceito de função através da investigação, resolução de problemas
e modelagem matemática**

Macapá-Ap
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP
PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Mestrando: Edvan Pureza Jacques

Orientador: Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil

Dissertação apresentada a banca do Curso Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática, sob orientação do Prof.: Dr. José Walter Cárdenas Sótil.

Macapá, 03 de novembro de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Mário das Graças Carvalho Lima Júnior – CRB-2 / 1451

J21 Jacques, Edvan Pureza.

Construindo o conceito de função através da investigação, resolução de problemas e modelagem matemática / Edvan Pureza Jacques. - 2022.

1 recurso eletrônico. 59 folhas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá, Mestrado Profissional em Matemática, Macapá, 2022.

Orientador: José Walter Cárdenas Sotil.

Modo de acesso: World Wide Web.

Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Matemática - Função. 2. Resolução de problemas. 3. Investigação. I. José Walter Cárdenas Sotil, orientador. II. Universidade Federal do Amapá . III. Título.

CDD 23. ed. – 510

JACQUES, Edvan Pureza. **Construindo o conceito de função através da investigação, resolução de problemas e modelagem matemática.** Orientador: José Walter Cárdenas Sotil. 2022. 59 f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal do Amapá , Macapá, 2022.


UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós Graduação de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de EDVAN PUREZA JACQUES intitulada: “*Construindo o conceito de função através da investigação, resolução de problemas e modelagem matemática*”, após terem inquerido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Macapá, 08 de novembro de 2022.

Documento assinado digitalmente
 JOSE WALTER CARDENAS SOTIL
Data: 15/11/2022 09:50:14-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Presidente da Banca Examinadora (PROFMAT-UNIFAP)



Dr. Marleson Rôndiner dos Santos Ferreira

Avaliador Externo (IFAP)



Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco

Avaliador interno (PROFMAT-UNIFAP)

MACAPÁ/AP

2022

A minha família, razão de minha
existência.

A Deus.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me permitido saúde e determinação para não desanimar e com isso ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso e na realização desse trabalho.

Aos meus pais Alberto e Graça, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A Maria Lúcia (esposa) e Ana Livia (filha), que compreenderam a minha ausência, sou grato pelo amor, pelo apoio, sem vocês esse trabalho de dissertação não teria chegado ao fim.

Aos meus amigos Ziro e Sebastião, obrigado pelos melhores conselhos, e aos novos amigos que a universidade me oportunizou por compartilhar momentos incríveis.

Agradeço ao meu orientador Dr. Walter Cárdenas, por aceitar conduzir o meu trabalho de conclusão de curso e a todos os professores do curso pela excelência e todo o conhecimento adquirido.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado!

RESUMO

Esta é uma pesquisa de cunho bibliográfico na área da educação matemática e tem como tema de atuação a investigação, resolução de problemas e modelagem matemática e embasado nessa metodologia construir o conceito de função, como também alguns modelos de situações reais e outros que fazem parte da história da matemática para servir de exemplo de aplicação da investigação e resolução de problemas envolvendo o objeto do conhecimento chamado função, o fruto dessa pesquisa visa atender uma nova exigência da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) conhecido como itinerário formativo e esse é subdividido em três partes: Aprofundamento, Projeto de vida e Eletiva, chamado de parte flexível do conhecimento permitindo ao professor inovar na sua prática pedagógica.

As ideias que serão tratadas neste trabalho representam uma forma de buscar meios eficazes no que tange a melhoria do ensino envolvendo o assunto de funções e tem como objetivo maior uma participação mais crítica e reflexiva por parte do aluno e possibilitando assim uma maior participação no processo ensino aprendizagem. Também iremos propor aqui algumas atividades didáticas, onde o aluno terá a oportunidade de construir a partir de uma situação concreta do cotidiano em um ambiente de modelagem matemática o conceito de função.

Palavras-chave: Função; Resolução de problemas; Investigação; Modelagem.

ABSTRACT

This is a bibliographic research in the area of mathematics education and has as its theme the investigation, problem solving and mathematical modeling and based on this methodology to build the concept of function, as well as some models of real situations and others that are part of the history of mathematics to serve as example of application of investigation and problem solving involving the object of knowledge called function, the result of this research aims to meet a new requirement of the National Common Curricular Base (BNCC) known as formative itinerary and this is subdivided into three parts: Deepening, Life Project and Elective, called the flexible part of knowledge allowing the teacher to innovate in his pedagogical practice.

The ideas that will be dealt with in this work represent a way of seeking effective means regarding the improvement of teaching involving the subject of functions and has as its main objective a more critical and reflective participation on the part of the student, thus enabling greater participation in the teaching-learning process. We will also propose here didactic activities, where the student will have the opportunity to build the concept will have the opportunity to build the concept of function from a concrete everyday situation in a mathematical modeling environment the concept of function.

Keywords: Function; Problem solving; Investigation; Modeling.

LISTAS DE FIGURAS

<i>Figura 1 - Tábula babilônica: Plimpton 322.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 2- Gráfico Velocidade - Tempo, segundo Oresme</i>	<i>18</i>
<i>Figura 3- Relação entre conjuntos.....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 4 - Representação em diagramas da função $f: X \rightarrow Q +*$.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 5 - Representação em diagramas da função $f:A \rightarrow B$</i>	<i>26</i>
<i>Figura 6 - Relação f entre os conjuntos A e B</i>	<i>27</i>
<i>Figura 7 - Relação f entre os conjuntos A e B</i>	<i>28</i>
<i>Figura 8- Quadriculados com palitos.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 9 - Bigorrilho</i>	<i>41</i>
<i>Figura 10 - medição de volume</i>	<i>46</i>
<i>Figura 11- pneu de bicicleta.....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 12 - polígono regular inscrito na circunferência.....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 13 - polígono regular circunscrito.....</i>	<i>49</i>
<i>Figura 14 – caixinha de ressonância.....</i>	<i>50</i>
<i>Figura 15- monocórdio</i>	<i>51</i>
<i>Figura 17- metalofone</i>	<i>51</i>
<i>Figura 16- violão</i>	<i>51</i>

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1: Momentos na Realização de uma investigação</i>	<i>34</i>
<i>Tabela 2- tarifas de água.....</i>	<i>36</i>
<i>Tabela 3 – consumo de água.....</i>	<i>37</i>

LISTA DE GRÁFICOS

<i>Gráfico 1- Geração de RSU no Brasil - 2010 - 2019</i>	<i>30</i>
<i>Gráfico 2- Comparativo da geração de RSU - Resíduos Sólidos Urbanos no Brasil, por região, 2010 - 2019.</i>	<i>31</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DO TEMPO	15
3	A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO VIA TEORIA DOS CONJUNTOS.....	23
4	A NOÇÃO INTUITIVA DE FUNÇÃO	29
5	A INVESTIGAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	32
5.1	INVESTIGAR EM SALA DE AULA DE MATEMÁTICA	32
5.2	INVESTIGANDO DEPENDÊNCIAS ENTRE GRANDEZAS	35
6	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	38
6.1	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS EM SALA DE AULA.....	38
6.2	O QUE É UM PROBLEMA MATEMÁTICO?	39
6.3	CONSTRUINDO O CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.	40
7	MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	43
7.1	A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO UMA ALTERNATIVA PARA A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS	43
7.2	MODELANDO UMA SITUAÇÃO - PROBLEMA ENVOLVENDO CRESCIMENTO LINEAR.....	46
7.3	MODELANDO UMA SITUAÇÃO PROBLEMA ENVOLVENDO ÁREA DE CÍRCULO.....	48
8	EXPERIMENTOS	50
8.1	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	50
8.2	QUESTIONAMENTOS NORTEADORES	51
8.3	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	53
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
10	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	56

1 INTRODUÇÃO

O conceito de função é um dos temas mais importante dentro da matemática, uma vez que o mesmo permeia os mais diversos ramos do conhecimento, desde a física, quando relacionamos as grandezas espaço e tempo, até a biologia, quando se observa o crescimento de bactérias em estudos controlados. Os estudos das funções, no contexto intramatemático, é de suma importância, pois através dele constrói-se, por exemplo, todos os fundamentos do Cálculo diferencial e integral.

Com o advento do Novo Ensino Médio – NEM, a partir da lei 13.415/2017 e, por conseguinte, o estabelecimento de uma Base Nacional Comum Curricular – BNCC, o ensino da matemática passa a se fundamentar no desenvolvimento de competências e habilidades que deverão ser construídas a partir de processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas (Brasil, p.529, 2017). Sendo assim, propomo-nos a desenvolver uma pesquisa cunho bibliográfico em torno do tema: Construindo o conceito de função através da investigação, resolução de problemas e modelagem matemática. Para tanto, fundamentamo-nos nos estudos de diversos pesquisadores da área da educação matemática, voltados especificamente para a investigação matemática em sala de aula (Ponte et al, 2013), a resolução de problemas (George Polya) e a modelagem matemática (Biembengut e Hein), entre outros.

A investigação matemática como tendência de ensino/construção do conhecimento matemático se caracteriza como uma metodologia que objetiva a produção do conhecimento através da ação direta do educando sobre o objeto de conhecimento. Investigar em sala de aula oportuniza a reflexão, autoconfiança, interação entre os alunos, estimula a criatividade, o pensamento matemático e o protagonismo estudantil. Braumann (2002), citado por Ponte et al (2013), afirma que “aprender matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino) ”.

Em relação a resolução de problemas, suas potencialidades como metodologia de ensino em sala de aula são enormes, vista que, ao resolver problemas matemáticos, diferentemente dos exercícios tradicionais, o aluno irá mobilizar seus conhecimentos prévios afim de construir um caminho para a solução do problema, gerando assim uma aprendizagem significativa, possibilitando a resolução de problemas futuros. Segundo Polya (1995), na resolução de

problemas, o professor atua como um auxiliador, questionando e orientando o aluno em torno dos caminhos, estratégias e variáveis que definem o problema. No entanto, essa orientação não deve tirar o protagonismo do aluno na resolução da situação – problema.

No que diz respeito a modelagem matemática, essa tendência metodológica na educação matemática, está intrinsecamente ligada a investigação matemática e a resolução de problemas, já que uma proposta de modelagem em sala de aula partirá sempre de um questionamento da realidade (situação – problema), em que o aluno irá explorar, investigar, criar conjecturas, testar hipóteses, afim de construir um modelo matemático que propicie a solução do problema inicial. Para Bassanezi (2006) “a modelagem matemática consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cuja soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. Por sua vez, Biembengut e Hein (2013) veem modelagem matemática como um elo de ligação entre a realidade e a matemática, um caminho que oportuniza ao aluno o fazer matemático partindo da realidade vivencial ou das necessidades nos campos de outras ciências.

Assim, além da análise da construção do conceito de função, através das metodologias anteriormente descritas, o presente estudo sugere algumas atividades didáticas que evidenciem a possibilidade prática da construção significativa do conceito de função, subsidiadas pelas tendências de educação anteriormente citadas.

Tradicionalmente o conceito de função é desenvolvido em sala de aula a partir das relações binárias entre elementos de dois conjuntos, mostrando a influência que o Movimento da Matemática Moderna teve na reestruturação do currículo de matemática no Brasil. Não queremos em hipótese alguma abandonar este pensamento, porém considerando a realidade do aluno atual, ter uma abordagem que valorize o significado do conceito de função como relação de dependência entre duas grandezas é de fundamental importância no processo ensino aprendizagem, partindo de atividades que valorizem a construção do conceito através da noção intuitiva de função, subsidiado por ações onde o educando atua de forma direta. Dessa forma, a presente pesquisa busca evidenciar a importância da construção do conceito de função pelo educando a partir de atividades investigativas, resolução de problemas e modelagem matemática, intencionando responder ao seguinte questionamento: *É possível um outro caminho para a construção do conceito de função a partir de atividades investigativas, resolução de problemas e modelagem, valorizando a participação ativa do educando no processo de construção do conhecimento?*

Na antiguidade, os mais diversos conceitos matemáticos foram construídos quase sempre em torno da necessidade de resolução de atividades práticas do cotidiano. Não obstante, o desenvolvimento deste conceito na educação, se dá de forma abstrata, através da teoria dos conjuntos. Sabe-se que a abstração é intrínseca a matemática, no entanto, quando se trata da construção de conceitos em sala de aula, é consenso que buscar relacionar os objetos matemáticos em estudo, com a realidade do educando, nas suas mais diversas formas, é essencial para a internalização e construção de conceitos significativos, com referência a isso temos o apoio dos PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997):

O conhecimento formalizado da matemática necessita ser passado para tornar-se possível de ser aprendido, ensinado; ou seja, os pensamentos dos teóricos matemáticos não são passíveis de comunicação direta ao aluno. (...) esse processo de transformação do conhecimento científico em conhecimento escolar não passa só por mudanças de natureza epistemológica, contudo é influenciado por condições de ordem cultural, social e que procedem na elaboração de saberes intermediários, como ajuntamentos provisórios, cogentes e intelectualmente formadoras. É o que pode chamar de contextualização do saber (Brasil, 1997, p. 7).

O conceito de função é um dos mais importantes dentro da Matemática, uma vez a relação entre grandezas ocorre nas mais diversas áreas do conhecimento, oferecendo assim um grande campo de aplicação em sala de aula, além de subsídios para o desenvolvimento de atividades interdisciplinares. No entanto, a forma tradicional do desenvolvimento do conceito de função em sala de aula, partindo das relações binárias entre elementos de conjuntos, não atende as necessidades mencionadas anteriormente, utilizando de conceitos abstratos para a formalização e definição de função. É necessário, portanto, a viabilização de métodos que busquem dar significado aos conceitos em sala de aula, não somente pela formalização algébrica, mas pela construção intuitiva de relações entre grandezas. Neste sentido, Pitombeira e Roque (2012) nos ensina que:

Atualmente, quando pensamos no conceito de função, algumas ideias nos vêm à mente. Por exemplo, a ideia de uma correspondência. Deste ponto de vista, poderíamos dizer que as tabelas babilônicas e egípcias já pressupunham, de alguma forma, a ideia de função, uma vez que se tratavam justamente de registros de correspondências (entre um número e o resultado das operações que envolvem este número). As tabelas astronômicas de Ptolomeu, similares às nossas tabelas de senos, também estabeleciam correspondências que consideramos hoje de natureza funcional (Pitombeira e Roque, 2012, p.208).

Dessa forma, construir o conceito de função a partir de relações de dependências entre grandezas, adotando para tanto atividades investigativas, resolução de problemas e modelagem matemática, é essencial para construção significativa do conceito de função. Neste sentido, os

PCNEM (BRASIL, 1999), corroboram com tal assertiva, uma vez que, segundo este documento:

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 1999, p.121).

A construção do conceito de função a partir de atividades que valorizem a noção intuitiva, certamente geram a percepção por parte do aluno, e evidencia a matemática enquanto conhecimento da realidade do aluno. Neste sentido, Trindade e Moretti (2000, p.44) afirma que as expressões algébricas representativas de funções adquirem significados próprios quando o conceito intuitivo de função é previamente desenvolvido pelo educando.

No entanto, cabe ao educador assumir uma postura divergente daquela imposta pela forma tradicional de ensinar, onde o papel do aluno é de mero receptor, buscando mecanismos que revejam e valorizem a ação do estudante enquanto pessoa ativa e reflexiva. Assim, nos ensina D'Ambrósio, (1989) que:

[...] a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. (D'AMBRÓSIO, 1989, p.15).

Diante do exposto, percebe-se que a forma tradicional de ensinar matemática não condiz com aquilo que é necessário e propomos aqui para a construção de conceitos intuitivos dentro da matemática, mais especificamente, o conceito de função, uma vez que para tal é necessária uma revisão do papel do aluno e do professor, agora atuando como agentes de transformação sobre o objeto de conhecimento, não mais como emissor e receptor.

2 CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DO TEMPO

Assim como os mais diversos conceitos matemáticos, o desenvolvimento do conceito de função não surge repentinamente na matemática, se fez necessário alguns séculos para que o mesmo evoluísse e chegasse ao que temos na atualidade. Tal fato é mencionado no trabalho do pesquisador russo Youschkevitch (apud Maciel, 2011, p.10), que mostra um panorama da evolução deste conceito no decorrer do tempo, caracterizando-o em três fases:

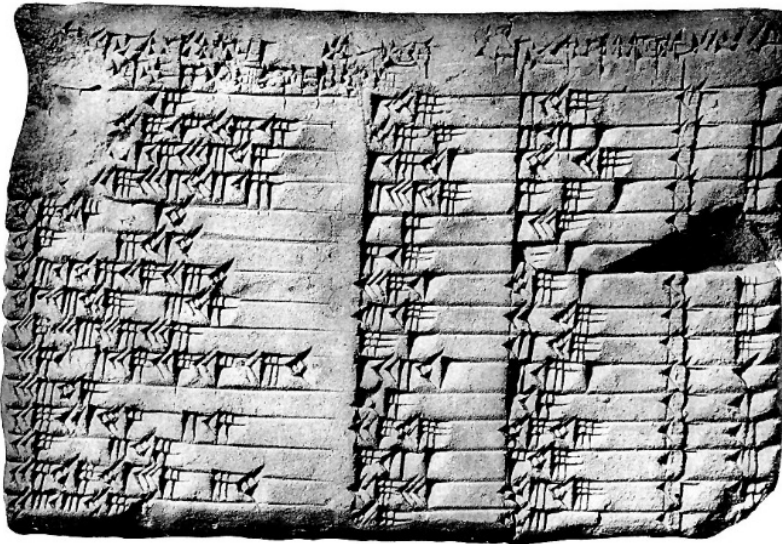
- Antiguidade: a noção de função aparece como uma dependência de valores de forma bem intuitiva;
- Idade Média: a noção de função está ligada às representações geométricas e mecânicas;
- Idade moderna: a noção de função passa a ser representada por expressões analíticas. (MACIEL, 2011, p.10).

Na antiguidade, destaca-se o papel dos babilônicos com suas tábuas de calcular, que apesar de não estabelecerem de forma direta, o material matemático apresentado por esses povos em seus registros, de certa forma traziam uma ideia intuitiva de função ao estabelecerem uma correspondência entre elementos de conjuntos distintos, como nos garante Roque (2012):

[...] tabelas babilônicas e egípcias já continham de alguma forma, uma ideia de função, uma vez que tratavam justamente de registros de correspondências (entre um número e o resultado das operações que envolvem esse número). Por essa razão, afirma-se algumas vezes que a noção de função tem sua origem na matemática antiga. (Roque, p.334, 2012)

Os babilônios utilizavam seus registros como um instrumento de consulta, onde a resolução de equações, potenciações, cálculo de raízes quadradas e cúbicas (na base sexagesimal) eram feitos através da consulta de resultados previamente calculados. Dessa forma, pode-se afirmar então, que as tábulas babilônicas apresentavam uma ideia rudimentar de função, estabelecida através de relações entre elementos de conjuntos distintos. Por exemplo, segundo alguns historiadores, na Figura 1, os números ali escritos em suas colunas representam, expressos em base sexagesimal, as medidas dos catetos e da respectiva hipotenusa de um triângulo retângulo. Assim, para determinar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, bastava relacionar na tabela, as medidas relativas aos catetos, evidenciando uma ideia intuitiva de função.

Figura 1 - Tábula babilônica: Plimpton 322



Fonte: Wikipedia

Outro exemplo da aplicação das tábulas babilônicas, diz respeito ao método para a resolução de equações cúbicas do tipo da $ax^3 + bx^2 = c$, que após reduzidas a forma $n^3 + n^2 = k$, eram facilmente resolvidas consultando as colunas representativas dos valores de n, n^2 e n^3 . Observe que este método tem em sua essência a ideia de funcionalidade, uma vez que relaciona os valores de n^3 e n^2 com sua soma.

A construção de ternas pitagóricas, na Grécia antiga, estabelece uma ideia de função, uma vez que, segundo Roque (2012), os Pitagóricos obtinham as referidas ternas a partir de um número $t = 2n + 1$, ($n \in \mathbb{N}$), ou seja, partiam sempre de um número ímpar e realizavam as seguintes transformações:

$$a = \frac{t^2+1}{2}, b = t \text{ e } c = \frac{t^2-1}{2}$$

$$\text{obtendo a terna Pitagórica } (a, b, c) = \left(\frac{t^2+1}{2}, t, \frac{t^2-1}{2} \right)$$

De forma análoga, os Platônicos desenvolveram um método para obter ternas Pitagóricas, porém partindo de um número par ($t = 2n, n \in \mathbb{N}$), da seguinte forma:

$$(a, b, c) = (t^2 + 1, 2t, t^2 - 1,)$$

Observa-se que ambos métodos nos transmite a ideia de funcionalidade, uma vez que para determinado valor de t (par ou ímpar) obtém-se, de modo único, uma terna pitagórica (a, b, c) .

Ainda na Grécia, não podemos deixar de mencionar a importância do trabalho de Arquimedes de Siracusa (287- 212 a.C.) no desenvolvimento do conceito de função. Arquimedes foi um dos primeiros matemáticos a estudar a relação de dependência entre grandezas diferentes, desenvolvendo importantes trabalhos na área da hidrostática e mecânica, sendo considerado por este fato o criador física-matemática.

Arquimedes, ao desenvolver trabalhos com áreas e volumes, se utilizou de um método onde buscava aproximar a quantidade desejada (área ou volume) através de somas de series ou seqüências, denominado método da exaustão, hoje aceito como o precursor do método da integração. Um exemplo da aplicação de tal método, segundo Boyer (1992, p.29) se refere à aproximação da área do círculo comparando com a área de polígonos regulares inscritos e circunscritos.

O trabalho de Claudio Ptolomeu (século II d.C) tem também algo que podemos mencionar como a ideia embrionária de função inversa. Em sua obra O Almagesto Ptolomeu descreve uma tabela onde apresenta as cordas dos arcos de $\frac{1}{2}^\circ$ a 180° .

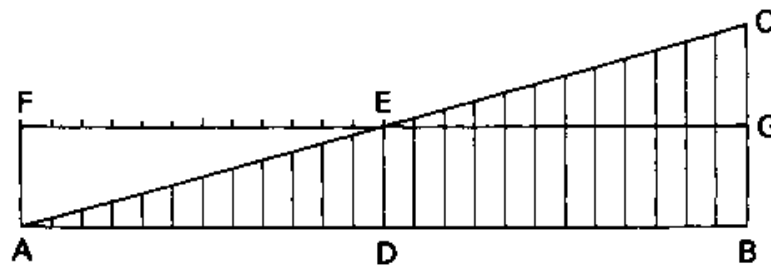
Essas cordas são, na verdade os ancestrais mais remotos de nossos senos. Como Ptolomeu usou também sua tábua em sentido contrário, para achar, por exemplo, o arco de uma dada corda, é plausível dizer que a ideia de função inversa também está presente em sua obra (Domingues e Iezzi, 1939, p.92).

Na Idade Média, podemos destacar o trabalho de Nicole Oresme (1323-1382), onde através do estudo do movimento uniformemente variado (velocidade variável) apresenta aquilo que hoje denominamos de gráfico de uma função. Neste sentido Boyer (1974) nos diz que:

Tudo que é mensurável escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade continua; por isso ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se locomove com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitudes) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades destes segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta; e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidades dos segmentos velocidades (que chamamos ordenadas) preencherá um triangulo retângulo (Boyer, 1974, p.192).

A Figura 2, disponível em Boyer (1992), mostra aquilo que seria o primeiro traçado gráfico de relação entre grandezas, ou seja, o primeiro gráfico de uma função matemática:

Figura 2- Gráfico Velocidade - Tempo, segundo Oresme



Fonte: Boyer, 1992.

No gráfico acima, um móvel parte do repouso do tempo A até B (espaço de tempo), sendo a medida do segmento BC a sua velocidade final. Então, a medida do segmento DE representa a velocidade média do móvel no percurso. Oresme percebeu que se outro móvel partisse com velocidade constante igual à DE, durante o mesmo espaço de tempo, percorreria a mesma distância que o primeiro. Veja que ao traçar gráficos da relação entre velocidade – tempo, Nicole Oresme contribuiu de forma significativa para análise da relação entre grandezas diferentes, ou seja, na evolução no estudo de funções. No entanto, o conceito de função não teve muito avanço no período medieval, conforme nos afirma Domingues e Iezzi (1939):

No período medieval não se verificaram avanços significativos na formação do conceito de função, de um lado porque a álgebra literal, fundamental para explorar esse conceito, só seria criada no final do século XVI. De outro, porque a ciência ainda elegera a descrição quantitativa dos fenômenos como meta, o que só aconteceria no renascimento, graças principalmente a Galileu Galilei (1564-1642). Portanto, não sem motivos há historiadores que atribuem a esse sábio, a criação do conceito de função (Domingues e Iezzi, 1939, p.93).

No século XVI, os estudos do matemático François Viète (1540-1603) vêm alavancar a insipiente Álgebra da época. Até então, quase inexistia a simbologia de representação de variáveis e incógnitas, o que vinha surgir com o trabalho deste matemático, intitulado *In Artem*. Segundo Maciel (2011):

[...] neste texto, o francês introduziu a prática de se utilizarem vogais para representar incógnitas e consoantes para a representação de valores constantes. [...] Assim o que se indica hoje por x , x^2 e x^3 era expresso por Vieté por A, A quadratum, A cubum (Maciel, 2011, p.13).

Ainda no século XVI, temos na Itália, a figura de Galileu Galilei (1564-1642), que rompe com as ideias aristotélicas e sua visão dos fenômenos naturais. Segundo Oliveira (1997) Galileu contribuiu grandemente com o desenvolvimento do conceito de função, uma vez que

introduziu o quantitativo nas relações gráficas, dados obtidos através do seu método experimental.

Foi sua obstinação em encontrar os resultados e as relações que proviessem mais da experiência do que apenas do pensamento que contribuiu para a evolução da noção de função. Isto representa uma grande diferença em relação à Oresme, para quem a teoria pura, isenta da experiência, era suficiente [...]. Assim, diferentemente de Oresme, seus gráficos, apesar de às vezes muito parecidos, resultam da experiência e da medida. As associações de causa e efeito são expressas de forma quantitativa, verificáveis e verificadas (Oliveira, 1997, p.17).

Galileu focou seu trabalho nos estudos do movimento, sendo que em uma de suas obras (Diálogo sobre duas novas ciências, 1638) encontra-se a seguinte lei: “Os espaços percorridos por um corpo que sai do repouso em movimento uniformemente acelerado estão entre si como os quadrados dos tempos para percorrê-los”. Essa lei era expressa pela igualdade $\frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2}$, onde

s e s_1 representam o espaço percorrido nos respectivos tempos t e t_1 . No entanto, como Galileu ignorava a simbologia algébrica (Domingues e Iezzi, op,cit, p.94) somente depois que esta lei passou a ser expressa pela forma hoje conhecida, ou seja, $s = kt^2$, onde $k = \frac{s_1}{t_1^2}$.

Podemos afirmar que o espaço, segundo a linguagem usual, é função do tempo e escrever $s(t) = kt^2$.

Por sua vez, no século XVII, temos as figuras do Matemático René Descartes (1596-1650) que desenvolveu a base do que hoje conhecemos como Geometria Analítica. Descartes em seu *Discurso do Método* apresenta aquilo que seria um avanço, uma ruptura em relação à geometria grega, já que retas e curvas poderiam ser construídas a partir de entes algébricos, sem os instrumentos sagrados dos gregos, ou seja, régua e compasso. Segundo Rossini (2006):

Descartes foi o primeiro a sustentar a ideia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de maneira a permitir o cálculo dos valores de uma delas em correspondência aos valores dados pela outra. (ROSSINI, 2006, p.02-03)

Pode-se afirmar então que com Descartes surge a ideia de representação algébrica de dependência entre duas quantidades variáveis. Deve-se também a Descartes a introdução do uso das letras iniciais do alfabeto para representar parâmetros e últimas para designar incógnitas, fato que se perpetuou na matemática (Boyer, 1974, p.248).

Temos ainda no século XVII, as figuras do inglês sir Issac Newton (1642-1727) e do alemão Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716) que também apresentaram suas contribuições ao desenvolvimento do conceito de função. Newton criou alguns conceitos importantes aos estudos futuros e ao desenvolvimento do conceito de função. Segundo Eves (2004):

[...] sendo o primeiro matemático a mostrar que uma função poderia ser descrita como uma série de potências foi ele quem introduziu o termo “variável independente”. O matemático inglês criou o chamado método dos fluxos, no qual uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser quantidades variáveis, que recebiam o nome de fluente e taxa de variação do fluxo (EVES, 2004, p.439)

Por sua vez Leibniz introduziu os termos *constantes*, *variável* e *parâmetros*. Também foi este matemático quem empregou o termo **função** pela primeira vez para designar valores em um ponto de uma curva. Apesar de terem estudados diversas relações funcionais, Newton e Leibniz não explicitaram o conceito de função em suas obras. Neste sentido, Roque (2012) nos afirma que:

A falta de um termo geral para exprimir quantidades arbitrárias, que dependem de outra quantidade variável, motivou a definição de função, expressa pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli. No final do século XVII, Bernoulli já empregava essa palavra relacionando-a indiretamente a “quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes”. Tal concepção é a mesma que temos em mente quando associamos uma função à expressão $f(x) = x + 2$, por exemplo. Temos aí uma quantidade indeterminada x , que é suposta variável, e uma constante, no caso, 2. (ROQUE, 2012, p.338)

Somente alguns anos após, é que Johann Bernoulli (1667-1748), em um artigo direcionado a Academia de Ciências de Paris apresenta uma definição formal para o conceito de função:

Definição. Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes. (ROQUE, 2012, p.338)

Ainda neste artigo, segundo Roque (op.cit), Bernoulli apresenta a simbologia para a caracterização de uma função (nomear uma função), onde o mesmo usa a letra grega φ (phi) sem os parênteses hoje utilizados, ou seja, φx representava uma função na variável x . No entanto, segundo Boyer (1974, p.326) deve-se a Euler a mais importante de todas as notações, a de $f(x)$ para representar uma função de x . Outro fato, uma das obras mais importantes de Euler “Introduction in analysin infinitorum” (Introdução à análise infinita), que alicerça todo o

estudo matemática, na segunda metade do século XVIII, que torna o conceito de função fundamental para o estudo da análise. Logo no início do volume 01 desta obra, Euler apresenta uma definição para função:

Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade de números, ou de quantidades constantes. (ROQUE, 2012, p.339).

Na idade contemporânea, o conceito de função como até então era aceito, passa a ser visto segundo um fenômeno físico: a propagação do calor. Surge neste contexto o matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que, segundo Boyer (1974, p.210) apresentou papel fundamental na discussão do conceito de função. O trabalho de Fourier consistia basicamente em determinar como o calor se propaga em uma chapa sólida, dadas certas condições iniciais. A necessidade de ajustar dados para obter a solução do problema, Fourier cria a possibilidade de definir uma função somente em um intervalo a través de uma série numérica: as séries de Fourier.

Ao fornecer a solução de um problema considerando somente um intervalo, ou definir uma função somente em um intervalo, Fourier apresentava um recurso inovador em relação à definição da função pela sua expressão analítica. Nesse caso, uma função era determinada automaticamente se a expressão analítica estivesse bem estabelecida. Não era necessário prestar atenção ao domínio de definição da função; aliás, sequer existia essa noção de domínio. Essa e outras definições desse tipo, que nos são bastante familiares, começaram a aparecer nesse momento, mas só se desenvolverão com o estudo dos conjuntos numéricos. (ROQUE, 2012, p.358)

Em sua obra *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analítica do calor-1822) Fourier apresenta uma definição mais geral do termo “função”:

Em geral, a função fx representa uma sucessão de valores, ou ordenadas, os quais cada um é arbitrário. Uma infinidade de valores sendo atribuídos à abscissa x , existe um número igual de ordenadas fx . Todas têm valores numéricos *atuais*, ou positivos, ou negativos, ou nulos. Não se supõe que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem uma à outra de um modo qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade. (ROQUE, 2012, p.359).

Dirichlet foi um dos primeiros a reconhecer que nem toda função pode ser expressa por uma série de Fourier, e seu trabalho é fundamental para a definição de função como hoje a conhecemos. A definição de Dirichlet está bem próxima daquela atualmente fundamentada na teoria dos conjuntos e de números reais, no entanto, segundo Boyer (1974, p.405), esses dois conceitos ainda não estavam estabelecidos à época. No estudo da completude dos números

reais, através de Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916), surge a ideia de relação biunívoca entre elementos de conjuntos distintos, surgindo neste contexto a ideia de função como uma correspondência entre dois conjuntos numéricos.

3 A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO VIA TEORIA DOS CONJUNTOS

A teoria dos conjuntos desenvolvida por George Cantor (1845 – 1918), traz a fundamentação necessária para a construção do conceito de função como hoje a conhecemos. Segundo Roque (2012), em 1939, um grupo de estudiosos franceses, autointitulados Bourbaki, apresentam a definição moderna de função:

Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma *relação funcional* se, para todo x pertencente a E , existe um único y pertencente a F que possui a relação dada com x . Damos o nome *função* à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E , o elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x ; y será dito o valor da função no elemento x . (ROQUE, 2012, p.428).

No entanto, essa definição será reformulada e função será redefinida como um subconjunto do produto cartesiano $E \times F$, passando a ser vista como um conjunto de pares ordenados da forma (x,y) , onde x pertence a E e y pertence a F . Neste contexto x deixa de ser visto como uma grandeza variável e passa a ser olhado como um elemento variando dentro de um conjunto numérico estabelecido. Em 1939, segundo Roque (2012, p.428), o grupo Bourbaki elabora o conceito que até hoje perdura sobre função: “Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f) , onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que se $(x,y) \in f$ e $(x, y') \in f$ então $y = y'$ ”. Esta definição caracteriza função segundo a ideia de pares ordenados, perdendo assim a visão dinâmica ao qual o conceito fora concebido. Neste sentido Roque (2012), afirma que:

A definição formal de função, que aprendemos na escola, segue o padrão bourbakista, o que provoca uma dificuldade de conciliação em relação aos exemplos de função que são efetivamente estudados. É difícil associar a noção dinâmica de função, que aparece em situações físicas, à definição formal, de natureza estática. (ROQUE, 2012, p.429).

A definição abaixo foi extraída do livro “A matemática do Ensino Médio, volume 01” da Coleção do Professor de Matemática, publicado em 2006 pela Sociedade Brasileira de matemática – SBM; seus autores são professores brasileiros com profundos conhecimentos na área e com trabalhos voltados para o aperfeiçoamento e formação continuada de professores de matemática.

Dados os conjuntos X, Y , uma *função* $f: X \rightarrow Y$ (lê-se: “uma função de X e Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o *domínio* e Y e o *contradomínio* da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f , ou *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \rightarrow f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. (LIMA, et al., 2006, p. 38).

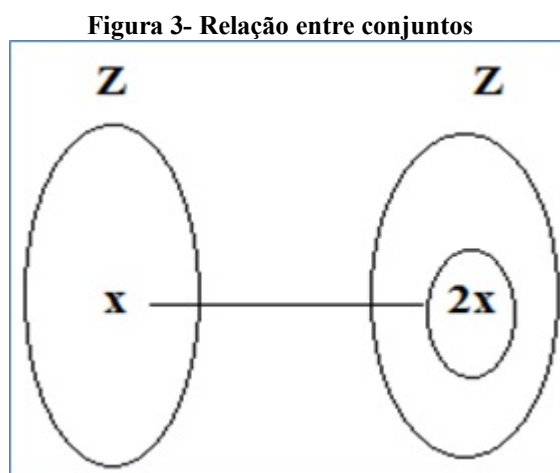
Esta definição fundamenta-se na noção de relação entre elementos de dois conjuntos distintos ou não, estabelecida através de uma regra ou lei de formação, onde cada elemento x do domínio da função (conjunto X) se relaciona de forma única com um elemento y do contradomínio (conjunto Y). Vamos exemplificar:

- Seja $f: Z \rightarrow Z$, uma função tal que $f(x) = 2x$. Para esta função, temos:

Domínio de $f = Dom(f) = Z$

Contradomínio de $f = CD(f) = Z$

Regra ou lei de formação $\rightarrow f(x) = 2x$



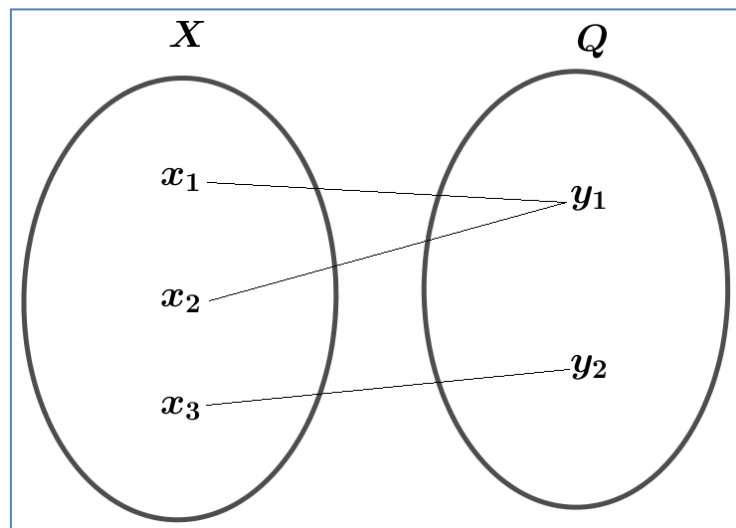
Fonte: autor (2022)

Pelo diagrama na Figura 3, podemos perceber que o conjunto imagem da função é um subconjunto do contradomínio formado pelos números inteiros pares. Observe que para todo elemento do domínio existirá um único elemento no contradomínio e que para $x_1, x_2 \in D(f)$, sendo $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Neste caso dizemos que a função f é **injetora**.

- Seja X o conjunto dos triângulos do plano β com as medidas dos lados representados com números racionais positivos e Q_+^* o conjunto dos números racionais estritamente positivos. Se a cada elemento $x \in X$ associarmos um número $y = f(x) \in Q_+^*$, onde y representa o perímetro do triângulo x , teremos uma função $f: X \rightarrow Q_+^*$. Note que, para elementos

distintos de X , neste caso, poderá haver uma imagem comum, pois triângulos distintos poderão apresentar perímetros semelhantes. Por exemplo, para os triângulos x_1 e x_2 , tais que x_1 é o triângulo equilátero de lado 4 e x_2 é o triângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5, temos que $f(x_1) = f(x_2) = 12$. Note que para todos os elementos de Q_+^* existirá um ou mais triângulo correspondente em X , neste caso, o conjunto imagem da função é o próprio contradomínio, ou seja, $\text{Im}(f) = \text{CD}(f)$. Nesta situação, dizemos que a função f é **sobrejetora**.

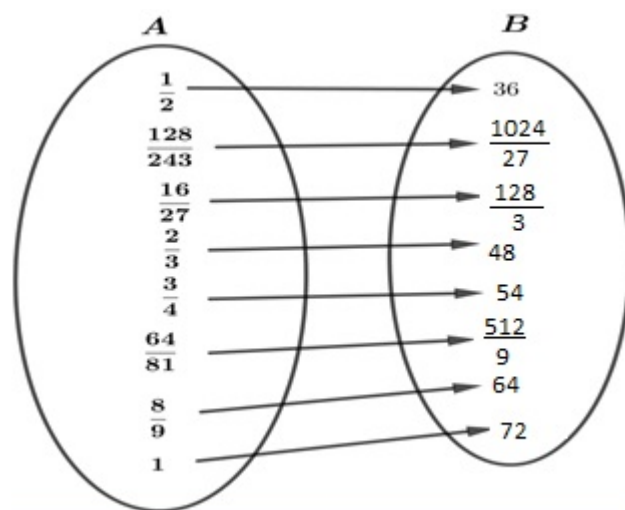
Figura 4 - Representação em diagramas da função $f: X \rightarrow Q_+^*$



Fonte: autor (2022)

- Consideremos agora a função $f: A \rightarrow B$, onde $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{128}{243}, \frac{16}{27}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{64}{81}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$ e $B = \left\{ 36, \frac{1024}{27}, \frac{128}{3}, 48, 54, \frac{512}{9}, 64, 72 \right\}$. A função f é denominada função comprimento da nota musical da escala pitagórica, definida por $f(x) = 72x$. Abaixo temos a representação em diagramas de tal função;

Figura 5 - Representação em diagramas da função $f:A \rightarrow B$



Fonte: autor (2022)

Observe que para cada elemento do domínio existe uma imagem correspondente e diferente da imagem de qualquer outro elemento de A e que o conjunto imagem envolve todos os elementos do contradomínio, ou seja, a função f é injetora e sobrejetora. A esse tipo de função, chamamos de **função bijetora**.

Os três exemplos anteriores ilustram a definição formal de função através da relação entre elementos de dois conjuntos, relação estabelecida através de uma lei de formação ou regra. Como dito anteriormente, essa forma de definir função, estabelecida pelo grupo Bourbaky no início do século XX, tem forte predominância no contexto escolar e dos livros didáticos, apontando para uma valorização da abstração e formalismo matemático.

No entanto, percebe-se que essa forma definir função utiliza somente a relação entre elementos de conjuntos distintos ou não, a partir das condições impostas para que haja a correspondência entre os elementos, não caracterizando função como um subconjunto de pares ordenados de um produto cartesiano.

A seguir, mostraremos a definição de função apresentada no livro “Fundamentos da Matemática Elementar – Vol. 01 – Conjuntos, Funções”, dos autores Gelson Iezzi e Carlos Murakami. Observe que a definição apresentada se fundamenta na noção de pares ordenados, apresentando o conceito de função a partir da relação entre elementos de dois conjuntos numéricos A e B, subconjuntos de \mathbb{R} (conjunto dos números reais), sendo a função um caso particular destas relações. Vejamos:

“Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.” (Iezzi e Murakami, 2013, p.81)

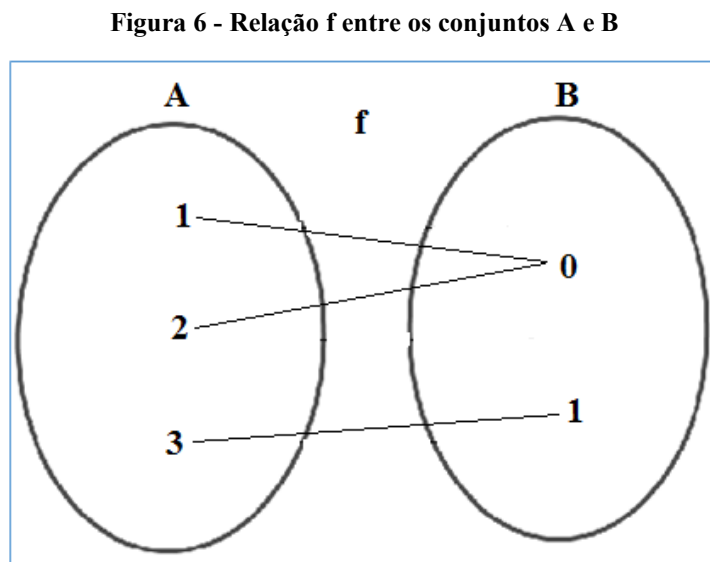
A definição anterior não estabelece a necessidade de uma lei de formação ou regra, utiliza somente a ideia de relação entre elementos $x \in A$ com um elementos $y \in B$, apontando os critérios para que o par ordenado (x, y) seja um ponto pertencente a função:

- i) Todos os elementos de A têm imagem em B
- ii) Um elemento $x \in A$ não pode ter mais de uma imagem em B .

Vejamos alguns exemplos:

- Dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{0,1\}$ a relação f apresentada no diagrama abaixo é uma função de A em B ?

Figura 06: Relação f entre os conjuntos A e B

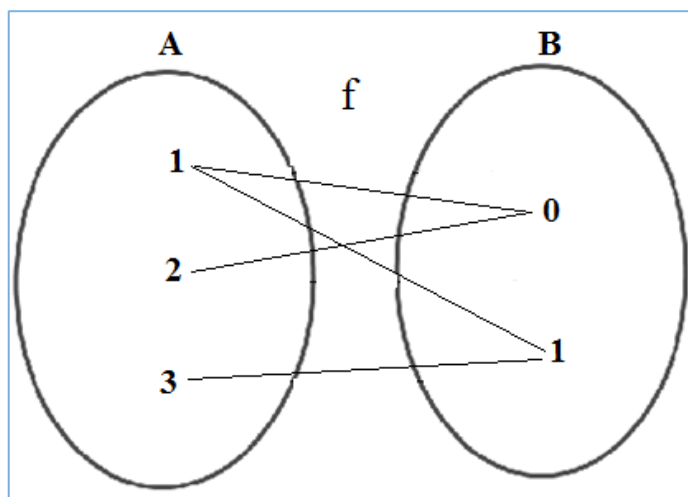


Fonte: autor (2022)

Observe que os critérios i) em ii) são atendidos na relação, portanto a relação entre os elementos dos conjuntos representa uma função de A em B . Em pares ordenados, temos: $f = \{(1,0), (2,0), (3,1)\}$.

- Dada a relação f , entre os conjuntos A e B, tal que $f = \{(1,0), (1,1), (2,0), (3,1)\}$, essa relação representa uma função de A em B?

Figura 7 - Relação f entre os conjuntos A e B



Fonte: autor (2022)

Note que o critério i) é atendido, pois todos os elementos de A tem imagem em B; no entanto, há o elemento $1 \in A$ que possui duas imagens distintas em B, não atendendo assim o critério ii), portanto a relação f não representa uma função de A em B.

4 A NOÇÃO INTUITIVA DE FUNÇÃO

A relação de dependência entre diferentes grandezas está presente nas mais diferentes formas no cotidiano. Explorar essas relações de modo a construir intuitivamente o conceito de função, certamente fará com que o educando assimile os conceitos envolvidos através de uma aprendizagem mais significativa. Reforçando o fato de não defender a exclusão do ensino formal dos conceitos matemáticos, até mesmo porque, enquanto ciência, se faz necessário tal construção; mas, buscando responder o famoso questionamento “para que serve isso? ” E, principalmente, buscando desmitificar o ensino da matemática, propomos aqui apresentar uma possibilidade da construção significativa do conceito de função, através de atividades investigativas, de modelagem e resolução de problemas, de modo que, quando necessário, a formalização do conceito matemático de função, dentro de uma visão científica da matemática, ocorra sem apresentar traumas ao estudante, permitindo uma melhor compreensão e abstração do conceito.

Neste ponto, nos amparamos nas concepções de conceito imagem e conceito definição defendidos pelos pesquisadores Tall e Vinner (1981), segundo os quais, a familiarização anterior à definição formal de um conceito matemático (imagem conceitual), contribui significativamente para a construção e abstração do conceito definição do referido objeto. Neste sentido, Lopes (2017) nos ensina que:

O termo conceito de imagem descreve, então, uma estrutura cognitiva total associada ao conceito (matemático). Essa estrutura total representa o conjunto de todas as imagens, propriedades e ou processos que alguma vez, na mente do indivíduo, foram associadas ao conceito. Daí pode-se perceber que à medida que o indivíduo tem novas experiências ao longo do tempo, referentes a um conceito, essas imagens vão sendo enriquecidas e dessa forma ocorre certa ampliação do conceito de imagem (Lopes, 2017, p.06).

Assim, em relação a construção formal do conceito de função, é necessário, a priori, o contato do educando com atividades diversas que subsidiem intuitivamente a elaboração de tal conceito.

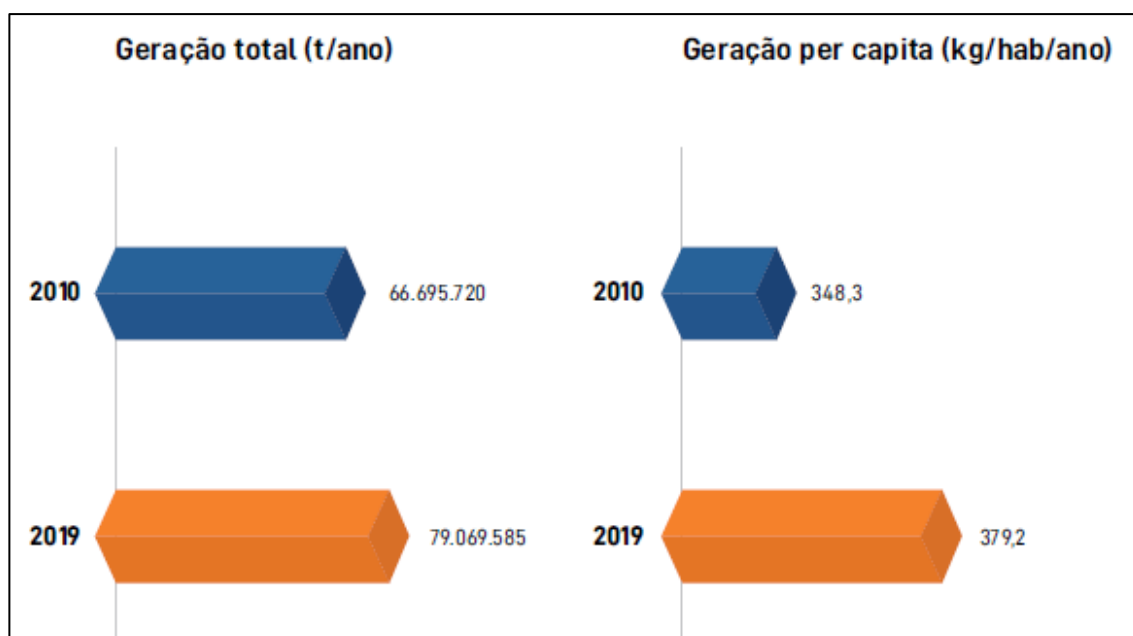
A construção intuitiva do conceito de função ocorrerá quando o educador matemático propuser atividades que valorizem a contextualização, através da exploração de situações em que a relação de dependência e variação entre grandezas possibilitem a interação entre o objeto

de conhecimento, sejam através de análise da dependência entre dados em tabelas, gráficos e observação de padrões.

Podemos exemplificar essa construção intuitiva do conceito de função através da seguinte atividade investigativa:

Produção de Resíduos Sólidos Urbanos (RSU) no Brasil: Entre 2010 e 2019, a geração de RSU no Brasil registrou considerável incremento, passando de 67 milhões para 79 milhões de tonelada por ano. Por sua vez, a geração per capita aumentou de 348 kg/ano para 379 kg/ano, conforme nos mostram os gráficos abaixo, disponíveis no Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil – 2020, produzidos pela ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais.

Gráfico 1- Geração de RSU no Brasil - 2010 - 2019



Fonte: Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil – 2020. Disponível em: <https://abrelpe.org.br/panorama-2020/>. Acessado em 20/07/2022.

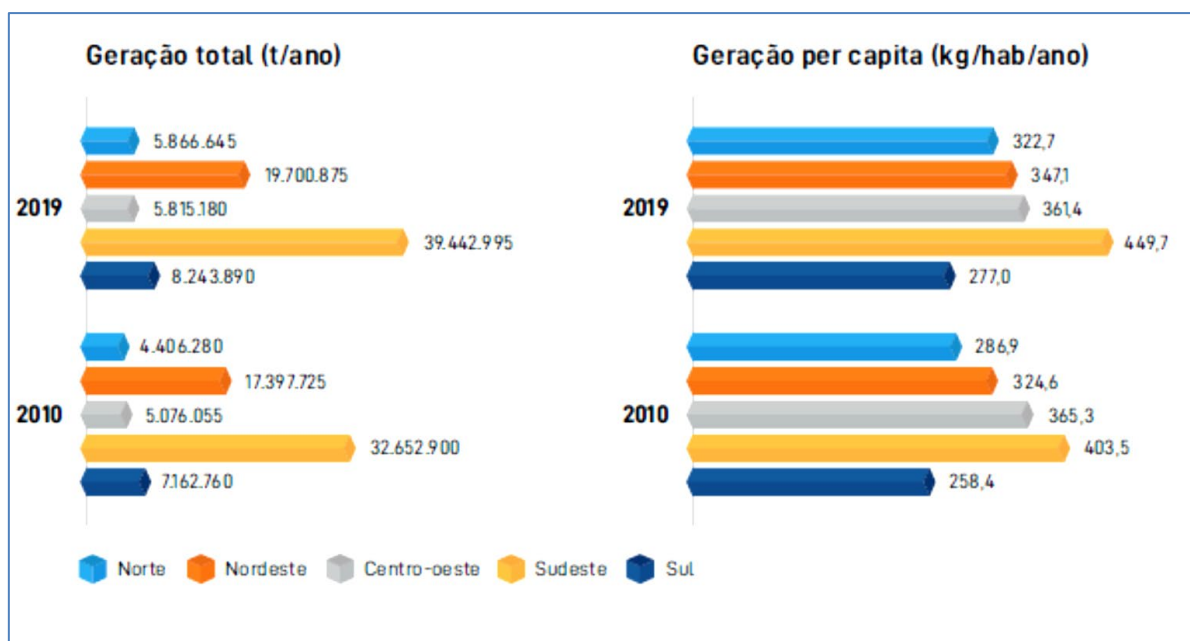
Como auxiliar a construção do conceito de função, através da exploração do Gráfico 1?

A produção de lixo per capita anual pode ser o ponto de partida para que o educando construa o conceito de função linear. A abordagem investigativa dependerá daquilo que o professor definir como objetivo da tarefa, podendo partir da produção de lixo familiar em um mês, até a produção de lixo anual da comunidade, do município. O importante é que o educando ao investigar essas situações, perceberá a relação direta entre o valor per capita da produção de lixo anual e o número de pessoas envolvidas (grupo familiar, comunidade ou município). Pelos

dados do gráfico, sendo p a população envolvida na investigação e Q a quantidade de lixo produzida em um ano (em toneladas), espera-se que os alunos percebam que p e Q se relacionam pela lei: $Q(p) = 379p$.

No Gráfico 2, temos a produção anual por região do país, podendo ser explorado também como descrito anteriormente.

Gráfico 2- Comparativo da geração de RSU - Resíduos Sólidos Urbanos no Brasil, por região, 2010 - 2019.



Fonte: Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil – 2020. Disponível em: <https://abrelpe.org.br/panorama-2020/>. Acessado em 20/07/2022.

5 A INVESTIGAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Analisando etimologicamente a palavra investigar, podemos estabelecer uma relação clara com o objetivo desta metodologia em sala de aula de matemática: investigar, do latim *investigare*, compõe-se do prefixo *in* (em) e *vestigare* (seguir a pista, ir atrás). Bastos (2016, p.183) define investigar como sendo o processo de “indagar, inquerir, pesquisar”. Segundo as definições expostas, percebe-se que o ato de investigar está diretamente relacionado a busca de informações, significados e construção de conceitos em torno de um tema ou problema estabelecido.

A investigação em sala de aula não está relacionada somente a educação matemática, pelo contrário, aulas investigativas sempre foram utilizadas no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, tal metodologia de ensino, em sua maior parte, foi exercida por professores ligados as áreas de ciências da natureza (biologia, química e física). O acompanhamento do processo de crescimento de uma planta, desde a semente até a germinação é um processo experimental muito comum nas aulas de ciências no ensino fundamental.

Acompanhar o crescimento de uma planta em um ambiente natural e o de outra planta em uma câmara escura, pode levar o aluno a perceber a importância da luz para o processo de fotossíntese e, conseqüentemente, para o crescimento da planta. No entanto, para que a referida atividade seja definida como uma atividade investigativa é necessário que o professor estabeleça alguns critérios e etapas que irão caracterizar o experimento como um processo investigativo.

Na educação matemática o processo investigativo também deve ser planejado e estruturado afim de que o educando possa realmente produzir conhecimentos matemáticos e não somente repetir procedimentos orientados pelo professor.

5.1 INVESTIGAR EM SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

Uma investigação matemática ocorre quando o professor possibilita ao educando atividades que o coloque no centro do processo de construção do conhecimento, de forma ativa, oportunizando o fazer matemático ao invés da recepção do conteúdo matemático. Para Ponte

(2003, p.23) a investigação matemática em sala de aula, aproxima o aluno da realidade do pesquisador matemático e da matemática enquanto ciência, dando significado para os objetos e os conceitos desenvolvidos e absorvidos durante a atividade, uma vez que:

O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

O desenvolvimento de uma atividade investigativa, segundo Ponte et al (op.cit. pg.25) enquanto metodologia de ensino da matemática, deve ser elaborada de modo a contemplar as etapas seguintes:

- **Apresentação da atividade a turma – Introdução da tarefa:**

O professor irá introduzir a tarefa investigativa, através de um problema ou um tema específico a ser investigado. Nesta etapa o professor deverá deixar claro o objetivo da investigação, de modo que os alunos saibam onde se pretende chegar, e preparar o ambiente de modo que se crie um cenário favorável ao processo de investigação. Skovsmose (2008, p.21) propõe os cenários para investigação como um conjunto de circunstâncias que o professor irá criar de modo a suscitar o interesse e a participação do aluno no desenvolvimento da investigação proposta. Dessa forma, esse pesquisador propõe que:

Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. O convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto?” do professor representa um desafio, e os “Sim, por que isto...?” dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão em busca de explicações. (Skovsmose, 2008, p.21)

Por sua vez, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) consideram essencial que no arranque da atividade investigativa.

[...] os alunos se sintam motivados para a atividade a realizar. O professor tem um papel muito importante [...] procurando criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo. Por outro lado, o professor deve dar uma atenção cuidadosa à própria tarefa, escolhendo questões ou situações iniciais que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio aos alunos (p. 47).

- **Execução da atividade Investigativa:** Nesta etapa ocorre de fato o processo investigativo. O professor, atuando como um mediador, deverá acompanhar a investigação desenvolvida pelos educandos, de modo a garantir que os mesmos caminhem com mais segurança em busca dos objetivos propostos. Para Ponte et al

(2013, p.20) essa etapa da investigação matemática envolve quatro momentos distintos, que destacamos na Tabela 1: Momentos na Realização de uma investigação quadro abaixo:

Tabela 1: Momentos na Realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> • Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte et al (2013,p.21)

No decorrer da investigação o professor deverá acompanhar cada etapa, interagindo com alunos/investigadores num processo dialógico, podendo sugerir de forma indireta, através de questionamentos, caminhos que norteiem os alunos durante a atividade, de modo que os mesmos se sintam amparados e seguros a desenvolver hipóteses e tecer conjecturas. Neste sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), nos ensinam que:

Na condução da aula, o professor tem de estar atento a aspectos característicos do processo investigativo, bem como a outros de natureza mais geral. O apoio a conceder pelo professor assume várias formas: colocar questões mais ou menos diretas, fornecer ou recordar informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão dos alunos. Numa aula com investigações o professor deve, sem dúvida, privilegiar uma postura interrogativa. As questões que coloca podem, no entanto, assumir diversas formas e ter objetivos diversos. Muitas vezes, a intenção do professor ao colocar uma questão é, simplesmente, a de clarificar ideias, quer para sua própria compreensão, quer para de toda turma (p.52).

Para o desenvolvimento da investigação sugere-se o trabalho em pequenos grupos, o que subsidiará a discussão de hipóteses a partir de diferentes interpretações. O primeiro contato com aquilo que se pretende investigar deve ser num sentido de explorar e formular questões,

dando a oportunidade aos alunos interagirem entre si e sobre o objeto de investigação. Essa primeira ação investigativa é essencial para o êxito do trabalho, uma vez que possibilitará aos educandos o refinamento de hipóteses, surgindo daí conjecturas que deverão ser exploradas, testadas e justificadas.

- **Discussão dos resultados:** A análise e discussão daquilo que foi produzindo é também uma fase crucial no processo investigativo, haja visto que nesta etapa ocorrerá a socialização e formalização dos conceitos matemáticos desenvolvidos no decorrer da investigação. É o momento em que os alunos exercitaram a capacidade de argumentação matemática e de reflexão sobre suas ações no decorrer da investigação. Para Ponte et al (2013), este momento é de suma importância para o êxito do trabalho, uma vez que:

Os alunos podem pôr em confronto suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador. O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado (Ponte et al, 2013, p.41).

5.2 INVESTIGANDO DEPENDÊNCIAS ENTRE GRANDEZAS

A seguir mostramos uma atividade onde é explorado o conceito de função através da relação de dependência entre duas grandezas. Atividade idealizada para trabalhar com alunos do ensino médio o desenvolvimento dos conceitos de função com dependência entre grandezas diferentes.

- **Atividade investigativa:** Investigando a conta de água e explorando a relação entre grandezas.
- **Objetivo da atividade:** Perceber a relação de dependência entre diferentes grandezas e relacioná-las através de um modelo matemático.

A Tabela 2 mostra as diferentes faixas de consumo de água e o valor das respectivas tarifas, cobradas pela Companhia de Água e Esgoto do Amapá – CAESA.

Tabela 2- tarifas de água

Categoria Classe de Consumo	Consumidores Medidos						Consumidores não Medidos	
	De 0 (zero) até a conta mínima		11-20m ³ (R\$/m ³)	21-30m ³ (R\$/m ³)	31-50m ³ (R\$/m ³)	>50m ³ (R\$/m ³)	Cota estimada (m3)	Valor (R\$)
	Cota mínima (m3)	Tarifa mínima (R\$)						
Residencial - R1	10	31,40	3,28	3,71	4,81	6,81	25	59,55
Comercial - C1	10	40,80	8,16	8,16	8,16	8,16	15	81,58
Comercial - C2	10	81,60	9,79	9,79	9,79	9,79	15	130,53
Comercial - C3	10	97,80	11,18	11,18	11,18	11,18	15	153,69
Industrial - II	10	111,80	11,18	11,18	11,18	11,18	20	223,66
Pública - PI	10	223,70	11,54	11,54	11,54	11,54	35	396,66
Residencial Social	10	12,60	-	-	-	-	25	22,63
Comercial Diferenciado	-	-	-	-	-	-	10	40,79

Tarifa de esgoto

O valor da tarifa de esgoto é igual a 100% (cem por cento) da tarifa de água para todas as categorias de consumo.



Fonte: <<https://caesa.portal.ap.gov.br/conteudo/servicos/tarifas>> Acesso em:06/05/2022

A partir da apresentação e análise da tabela 2, o professor deverá introduzir e conduzir o processo de investigação. O docente poderá solicitar antecipadamente para que os alunos tragam a conta de água de sua residência, quando houver, explorando a análise da mesma e comparando com os dados da tabela. Esse processo de interação com os dados tabelados e os fornecidos pela conta de água, ajudará na percepção das grandezas envolvidas na situação.

A seguir, mostramos alguns questionamentos que podem ser aventados pelo professor no decorrer da investigação, como forma de intervenção, buscando nortear as ações dos alunos:

- 1- A tabela anterior relaciona duas grandezas. Quais são essas grandezas?
- 2- Essas grandezas apresentam uma relação de dependência entre si? Justifique.
- 3- Suponha que um consumidor Residencial – R1, consuma 8 m³ de água em um mês. Qual será o valor da conta, em R\$, a ser paga? E se o consumo for de 10m³?
- 4- Construa uma tabela de dupla entrada que relacione o volume de água consumida (em m³) e o valor da conta mensal (em R\$), para consumos no intervalo de 0 m³ a 20 m³, com um incremento de 2 m³.

Resultado esperado pelo nosso aluno na Tabela 3:

Tabela 3 – consumo de água

VOLUME – (m ³)	VALOR À PAGAR – (R\$)
0	31,40
2	31,40
4	31,40
6	31,40
8	31,40
10	31,40
12	$31,40 + 2(3,28) = 37,96$
14	$31,40 + 4(3,28) = 44,52$
16	$31,40 + 6(3,28) = 51,08$
18	$31,40 + 8(3,28) = 57,64$
20	$31,40 + 10(3,28) = 64,20$

Fonte: autor (2022)

- 5- De acordo com a Tabela 3 , em qual intervalo de consumo não há variação na conta de água? O que isso significa?
- 6- É possível estabelecer um modelo matemático que relacione o valor à pagar (V) e o volume de água (x, em m³), consumido por um consumidor Residencial – R1, no intervalo de 0 m³ a 20m³ ?

Resultado esperado pelo aluno:

$$V = \begin{cases} 31,40 & \text{para } x \leq 10 \\ 3,28x - 1,40 & \text{para } 10 < x \leq 20 \end{cases}$$

6 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

6.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS EM SALA DE AULA

A resolução de problemas como metodologia do ensino da matemática oferece a possibilidade de o aluno construir e compreender os conceitos matemáticos a partir de atividades em que o mesmo a explore de forma ativa, buscando solução para uma situação-problema em que não se tem um roteiro pré-estabelecido de resolução. Nesta metodologia, o ensino da matemática não tem como finalidade a aplicação do conhecimento adquirido na resolução de problemas com um fim, mas a construção do conhecimento no decorrer da resolução de problemas, ou seja, o problema matemático não é finalidade em si, porém, o meio pelo qual professor e aluno irão desenvolver a aula.

Neste sentido, Onuchic e Allevato (2011), reforçam o acima exposto, uma vez que, segundo as pesquisadoras:

Nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema [o problema gerador] que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 85)

Ao adotar a metodologia da Resolução de Problemas em sala de aula, o papel do professor, bem como o do aluno, muda significativamente quando comparados com àqueles desenvolvidos nas aulas tradicionais; agora professor e aluno caminham juntos em busca de soluções, testando hipóteses e construindo estratégias a fim de alcançarem a solução para o problema proposto, quando assim houver.

6.2 O QUE É UM PROBLEMA MATEMÁTICO?

Não há uma definição expressa sobre o que vem a ser um problema matemático, segundo o documento NCTM – Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (Tradução portuguesa do original em inglês de 1989) um problema genuíno é:

"uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (NCTM, 1991, p.11)"

Segundo George Pólya (1995, p.13), a resolução de problemas inclui quatro etapas:

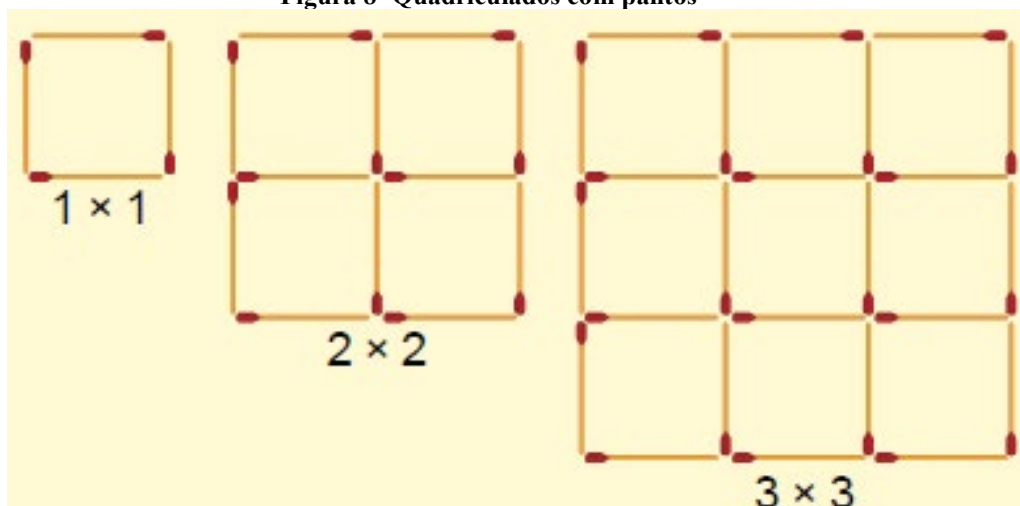
- i) **Compreensão do problema:** é essencial o aluno entender o que está sendo proposto no problema, identificar os dados, as incógnitas e objetivo.
- ii) **Planejamento:** com os dados, incógnitas e o objetivo estabelecido, o planejamento de como atacar o problema é crucial para a resolução do mesmo. Por exemplo, construir uma tabela para analisar a relação entre as variáveis pode ser uma ação que ajudará a resolver o problema.
- iii) **Execução do plano:** nesta etapa serão colocados em prática o roteiro estabelecido no planejamento, buscando a solução do problema, o que pode não ocorrer, levando, se necessário, a um replanejamento ou nova análise dos dados do problema.
- iv) **Verificação dos resultados:** após a execução do plano estabelecido é necessária uma análise criteriosa dos resultados alcançados, verificando se o objetivo estabelecido foi alcançado e se, por exemplo, o método utilizado na resolução pode ser estendido para outros problemas correlatos.

6.3 CONSTRUINDO O CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

A seguir apresentamos uma proposta de resolução de problema, onde o conceito de função é explorado através da análise da relação entre o número de palitos necessários para a construção de quadriculados. Esse problema aparece como uma questão proposta na prova da OBMEP – 2022, nível I, o qual adaptamos para este trabalho.

SITUAÇÃO – PROBLEMA: Marcelo usa palitos para fazer quadriculados como na figura. Para fazer um quadriculado 1×1 , ele usa 4 palitos; para fazer um quadriculado 2×2 ele usa 12 palitos, e assim por diante. Quantos palitos ele precisará para fazer um quadriculado 5×5 ? E um quadriculado $n \times n$, onde n é a medida do lado do quadrado maior?

Figura 8- Quadriculados com palitos



Fonte: Prova da 1ª fase da OBMEP/2022. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acessado em: 31/10/2022

Estabelecido o problema, a identificação das variáveis pode ser obtida através da construção, com material concreto ou desenhando, dos quadriculados de lado 4×4 e 5×5 , resolvendo, assim, a primeira parte do problema. No entanto, está será uma ação exclusiva dos alunos e previamente estabelecida no planejamento de resolução. Nesta fase de resolução, espera-se que os alunos identifiquem que o número de palitos, que chamaremos de **P**, para construir um quadriculado qualquer, depende da medida **n**, do lado do quadrado, em palitos, estabelecendo assim, uma relação de dependência entre essas variáveis.

Identificadas as variáveis, a segunda parte do problema será resolvida quando for determinada a forma como se relacionam as variáveis **n** e **P**. Para tanto, a partir da análise sobre

as figuras fornecidas e as construídas, espera-se que percebam que para uma quadriculado de lado medindo n palitos, teremos $n + 1$ linhas horizontais com n palitos, totalizando $n(n+1)$ palitos na horizontal. De modo análogo, obtém-se o mesmo número de palitos na vertical. Portanto, o número total de palitos será $2n.(n+1) = 2n^2+2n$. Dessa forma, sendo P o número de palitos de um quadriculado de lado n , podemos estabelecer a seguinte função:

$$P(n) = 2n^2 + 2n, n \in N$$

Outra proposta de situação problema: Na Figura 9, temos um personagem que eu mesmo criei, chamado de Bigorriho um avatar, cuja função é atrair a atenção dos alunos para a matemática tanto na prática como na sua filosofia. O problema é: como fechar a boca e abrir em seguida?



Fonte: autor (2022)

Compreensão do problema:

- A boca está na posição aberta para fechá-la, o maxilar inferior deve se movimentar até encontrar o maxilar superior, se está aberta, então existe o ângulo de abertura entre os maxilares.
- O que é que faz a boca fechar é a força aplicada no maxilar inferior pressionando o mesmo até encontrar a parte de cima, este fenômeno é observado em todos os mamíferos por isso constante.

Plano A

Uma solução poderia ser introduzir na cabeça de Bigorriho, um outro brinquedo que executa o movimento com maxilar superior, então essa solução será refutada.

Plano B

Fazer um mecanismo que feche drasticamente e seja aberto com a aplicação de uma força no sentido de baixo para cima na direção vertical.

Execução do plano B foi concluído com sucesso!

Verificação:

O ângulo entre os maxilares é de 36° graus ao aplicar a força haverá o fechamento do mesmo e o ângulo quando a boca está fechada é zero, então o movimento de fechamento depende da força aplicada.

Resposta ao problema:

Vamos abstrair e focar em apenas dois itens que são: força e movimento.

F → Independente de Bigorriho

M → Movimento depende da força aplicada

Temos aí os elementos fundamentos para a definição de uma função.

É de fácil verificação neste exemplo que a resolução de problemas perpassa as fronteiras da área de matemática e suas tecnologias e inclui áreas de conhecimentos distintos como se fosse uma soma vertical, todos de mesmo sentido e mesma direção em busca de uma tarefa maior que é a solução do problema gerador.

7 MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

7.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO UMA ALTERNATIVA PARA A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

Assim como a investigação matemática, a modelagem matemática faz parte do cotidiano do pesquisador matemático. O processo de modelagem matemática é tão antigo quanto a própria matemática. Segundo Biembengut e Hein (2013) a modelagem matemática:

[...] constitui um ramo próprio da Matemática que tenta traduzir situações reais para uma linguagem matemática, para que por meio dela se possa melhor compreender, prever e simular ou, ainda, mudar determinadas vias de acontecimentos, com estratégias de ação, nas mais variadas áreas de conhecimento. (BIEMBENGUT E HEIN, 2013, p.8)

Como metodologia de ensino e construção do conhecimento, a modelagem matemática é mais recente, tendo a partir do final do século XX, se destacado no meio acadêmico como uma possibilidade de contrapor o ensino tradicional da matemática, pautando-se na aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos fora do âmbito escolar. Nesse sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2013), nos informam que:

Uma particularidade no que se refere à inserção da Modelagem Matemática na Educação Matemática reside justamente no fato de que a “origem” da Modelagem Matemática não se deu no âmbito da Educação Matemática. Ao contrário, o habitat natural da Modelagem Matemática é área que se convencionou chamar de matemática aplicada, e no interior da qual surgiram os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que caracteriza uma atividade de Modelagem Matemática (Almeida, Silva e Vertuan, 2013, p.12).

Assim, podemos afirmar que modelagem matemática enquanto procedimento de ensino/construção/aprendizagem do conhecimento matemático se refere a atividades que, visando buscar solução para uma situação - problema do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, lança mão de ferramentas matemáticas, buscando um modelo matemático adequado. Neste sentido, Barbosa (2001), nos ensina que a modelagem matemática pode ser vista como

[...] um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Essas se constituem como integrantes de outras disciplinas ou do dia-a-dia; os seus

atributos e dados quantitativos existem em determinadas circunstâncias. (BARBOSA, 2001, p.06)

Um modelo matemático pode ser visto como o resultado e a tradução para a linguagem matemática de um fenômeno ou problema investigado matematicamente. Assim, um problema pode ter como modelo um gráfico, uma tabela, uma equação algébrica, etc., dependendo do nível de matemática exigida e do conteúdo curricular que norteia o processo de modelagem. É o que nos informam Biembengut e Hein (2013), ao afirmarem que:

A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como a aritmética e/ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. Porém, o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática (Biembengut e Hein, 2013, p.12)

Em relação ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem em sala de aula, Burak (1998, p.06) sugere cinco etapas, abaixo descritas:

- **Escolha do tema:** deve surgir a partir das sugestões dos educandos. A discussão em torno da importância, da validade para a realidade a qual a comunidade escolar está inserida, é de suma importância para o significado do processo. No entanto, temas fora da realidade social, econômica e cultural dos alunos, podem ser explorados, como forma de ampliar a realidade vivencial dos mesmos. Em relação a escolha do tema, Bassanezi (2012), orienta que, nesta etapa:

Faz-se um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser, preferencialmente, abrangentes para que possam propiciar questionamentos em várias direções. Por exemplo, se o tema escolhido for vinho pode-se pensar em problemas relativos à vinicultura, fabricação, distribuição, efeitos do álcool no organismo humano, construção de tonéis, entre outros. Se for abelha, poderão surgir problemas de dinâmica populacional, dispersão de colméias, forma dos alvéolos, comercialização do mel, comunicação dos insetos, interação com plantações etc. (Bassanezi, 2012, p.11).

- **Pesquisa exploratória:** é a fase em que os educandos irão coletar dados quantitativos e qualitativos em torno do tema. Em relação a este momento Burak(1998) ressalta que:

Essa etapa, além de favorecer a coleta dos dados de forma criteriosa, pode contribuir com aspectos de uma formação envolvendo valores, atitudes e um espírito mais crítico. Bem como se mostra importante na Modelagem, pois busca desenvolver a autonomia dos estudantes, e um olhar mais atento para as situações pesquisadas (Burak, 1998, p.08).

- **Levantamento de problemas:** diz respeito a exploração e análise dos dados obtidos anteriormente, visando traduzir os elementos coletados de forma a subsidiar a percepção do problema que irá nortear o processo de modelagem. Os problemas levantados irão determinar os conteúdos matemáticos que serão explorados no processo de modelagem.
- **Resolução de problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema:** identificado o problema na etapa anterior e estabelecidos os conteúdos matemáticos necessários, a busca pela solução do problema irá nortear o processo de modelagem matemática. É o momento em que os alunos irão elaborar e testar hipóteses, aplicar conhecimentos matemáticos prévios e construir novos conceitos matemáticos, auxiliados pelo professor. Para Burak(op.cit), essa etapa é fundamental no processo de modelagem matemática, uma vez que:

[...] favorece o trabalho com os conteúdos matemáticos que, assim, ganham importância e significado. Portanto, muitos conteúdos de campos, tais como Números e Operações, Grandezas e Medidas, Geometria, Álgebra e Tratamento da Informação, que isoladamente não despertam muito a atenção, em um contexto significativo para o estudante passam a ser significativos. É, também, o momento em que se pode oportunizar a construção dos modelos matemáticos que, embora simples, se transformam em oportunidades ricas e importantes para a formação do pensar matemático (Burak, 1998, p.10).

- **Análise crítica das soluções:** é o momento de teste, refinamento e de validação do modelo elaborado. Avalia-se neste momento se o modelo elaborado realmente atende às necessidades do problema estabelecido.

A análise crítica da(s) solução(ões) é uma atividade que favorece o desenvolvimento do pensamento crítico e da argumentação lógica, discutindo, também, a coerência da solução do(s) problema(s) às situações da realidade estudada. É um momento importante para a discussão de aspectos relacionados à Matemática, à Sociedade, à Cultura, à Economia e à Política (Burak, 1998, p.16).

Na área do conhecimento matemático e suas tecnologias a BNCC¹ estabelece 5 competências que deverá atingir ao final do novo ensino médio. A competência de número 5 versa sobre: investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas empregando estratégias e recursos como, observação de padrões, experimentação e diferentes tecnologias.

A modelagem matemática é uma metodologia ou uma transformação cujo o domínio está na existência de um problema real e significativo para o aluno e que faça parte dos

¹ BNCC: Base Nacional Comum Curricular

diferentes registros de representação matemática (algébrico, geométrico, estatístico ou computacional), valorizando o aluno no contexto sociocultural e aproximando a matemática que é praticada nos objetos do conhecimento antigo (conteúdo) e a vida real do educando.

Partindo do princípio do que se quer, o que se tem e o que pode ser feito, observando padrões e experimentando práticas do cotidiano podemos definir o conceito de função partindo do real até chegar no conceito formal de função como na observação do crescimento de uma cobra cascavel e o número de anéis no seu chocalho, ou até mesmo a quantidade de sacas de açaí (retiradas diariamente nas regiões ribeirinhas do estado do Amapá) relacionado com o valor vendido no comércio local ou a quantidade de cinzas que um fogão de lenha produz e combustível que foi queimado (madeira, caroços de açaí e bagaço de cana). Com esses e outros exemplos é possível que o aluno faça primeiro a imagem mental do que é uma função e assim permitir um olhar diferenciado e um melhor entendimento do conceito formal de função.

7.2 MODELANDO UMA SITUAÇÃO - PROBLEMA ENVOLVENDO CRESCIMENTO LINEAR

Figura 10 - medição de volume



Fonte: autor (2022)

Para ilustrar o problema de crescimento linear sugerimos a construção de um aparelho a base de cano PVC de fácil manuseio, como mostra Figura 10, onde temos no início uma abertura para colocar bolas de gude dentro de cano com um pouco de água (de preferência com uma dose de corante para se ter melhor visualização) ligado a uma mangueira transparente e

uma fita métrica que servirá para medir a variação do volume ao ser colocado as bolas de gude no cano PVC.

Daí vem o seguinte questionamento para ser passado para os alunos:

Qual é a variação que o volume de uma bola de gude provoca na altura do líquido que se encontra dentro da mangueira transparente?

Hipóteses 1: O tempo de lançamento entre as bolas de gude influencia na coluna do líquido.

Hipóteses 2: Para o lançamento de bolas de gude de mesmo tamanho a variação será igual?

Hipóteses 3: Independente do ponto inicial que se encontra o líquido a variação da altura do líquido será sempre a mesma.

Estratégia: Construção de um experimento , como mostra a Figura 10, que possibilite receber uma bola de gude que por sua vez impulsionará o líquido presente no tubo plástico que será visível o deslocamento do líquido através da mangueira pela ação do volume da bola de gude e observada na régua graduada.

Procedimento marca-se o ponto inicial (L) do lado do tubo transparente com um alfinete e a partir desse ponto serão marcados outros pontos após o lançamento de cada bola de gude.

As variáveis:

- Bola de gude
- Tempo
- Altura do volume do líquido

Análise do modelo será trocado o tamanho das bolas de gude

Solução: $F(x) = L + a/b(x)$

$a \rightarrow$ é a diferença entre as medidas das alturas entre dois lançamentos da bola de gude.

$b \rightarrow$ é a diferença entre os números da ordem dos lançamentos.

$L \rightarrow$ é o ponto inicial ou valor inicial.

$x \rightarrow$ representa a quantidade de bolas lançadas

7.3 MODELANDO UMA SITUAÇÃO PROBLEMA ENVOLVENDO ÁREA DE CÍRCULO.

Neste problema sugerimos a utilização de um material que pode ser produzido a partir de uma roda de uma bicicleta, ver Figura 11.

Figura 11- pneu de bicicleta



Fonte: Autor (2022)

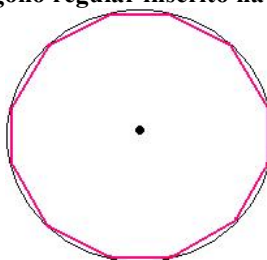
Construir uma função f que determina a área de um círculo qualquer a partir do valor do seu respectivo raio.

Situação

- A área de um círculo está relacionada diretamente ao valor do seu respectivo raio r e da constante π (pi) e é dado por $A=\pi.r^2$.
- Vamos entender, inicialmente, como foi encontrado essa fórmula da área do círculo a partir da figura 11.

No interior do aro da bicicleta da figura 11, podemos ver que temos um polígono regular circunscrito, ver com mais precisão a figura 12.

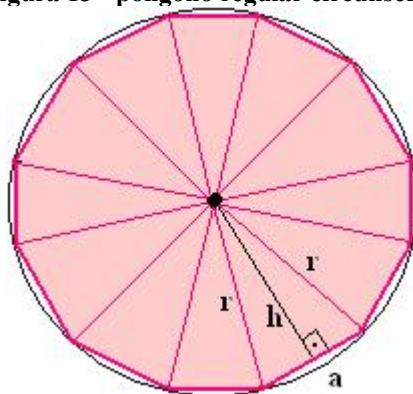
Figura 12 - polígono regular inscrito na circunferência



Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/area-circulo.htm>

Todos os segmentos de reta com origem no centro da circunferência da Figura 12 e que vão até o vértice do polígono regular são os raios do círculo e que por sua vez terá n triângulos no polígono regular, como mostra a Figura 13, e de acordo com a fórmula da área de um hexágono regular, podemos dizer que a área de um polígono regular de n lados seria:

Figura 13 - polígono regular circunscrito



Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/area-circulo.htm>

$$A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$$

Sendo $n \cdot a$ o valor do perímetro regular e h a altura do triângulo.

$$\text{Então, } A = \left(\frac{\text{perímetro do polígono regular} \cdot h}{2} \right)$$

Porém, se aumentarmos o número de lados do polígono regular infinitamente, a tendência é ficar parecido com o comprimento da circunferência, e a altura de cada triângulo formado no polígono regular fica igual ao raio do círculo. Com isso, podemos concluir que a fórmula do cálculo da área de um círculo poderá ser indicada da mesma forma que a área de um polígono regular de n lados, veja a relação abaixo:

$$A = \left(\frac{\text{perímetro do polígono regular} \cdot h}{2} \right) \rightarrow A = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \rightarrow A = \pi r^2$$

Depois da explanação da fórmula da área do círculo, o aluno irá descobrir que a função f procurada é dada por $f(r) = \pi r^2$, com r = raio de uma circunferência qualquer.

8 EXPERIMENTOS

8.1 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Reza a lenda que Pitágoras caminhava nas ruas da Grécia e de repente passa em frente a uma oficina, onde haviam alguns ferreiros trabalhando, dando marteladas em objetos metálicos e obviamente cada martelada que se dava produzia-se um som e Pitágoras ficou maravilhado com aquilo e percebeu que dependendo do tamanho, da espessura ou do comprimento daquele objeto, os sons produzidos eram diferentes e também percebeu que aqueles sons simultâneos eram agradáveis ao seu ouvido. Ele fica maravilhado com aquilo e procurou decifrar por que isso acontece, foi então que ele teve uma ideia em fazer uma caixinha de ressonância, e na parte superior ele fez pequenas medidas como se fosse uma régua dividindo em doze partes iguais. Em cada extremidade dessa caixa ele colocou dois cavaletes moveis e prendeu em cada cavalete uma única corda, como mostra a Figura 14, muito tempo depois esse pequeno instrumento foi chamado de monocórdio, um instrumento de uma única corda, um único fio, como mostra a Figura 15- monocórdio.

Figura 14 – caixinha de ressonância



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/>

Para abordar e exemplificar essa investigação foram construídos três instrumentos musicais: Metalofone, representado Figura 17. Monocórdio, representado na Figura 15, e o violão de 4 cordas, Figura 16. Tudo foi construído com material reciclado.

Figura 17- metalofone



Fonte: autor (2022)

Figura 15- monocórdio



Fonte: autor (2022)

Figura 16- violão



Fonte: autor (2022)

O som do metalofone, Figura 17, é para explicar as marteladas em objetos metálico e o monocórdio, Figura 15, inventado por Pitágoras é para verificar se o que aconteceu com o som das marteladas nos objetos metálicos pode acontecer com o som de uma corda esticada.

8.2 QUESTIONAMENTOS NORTEADORES

Para fazer o estudo do som, Pitágoras inventou o monocórdio. Ele percebeu que a metade era equivalente ao todo e que a média harmônica entre metade e o todo seria usado como unidade para uma escala musical.

A metade do comprimento da corda soa harmoniosamente com a corda toda, para qualquer comprimento?

O que vem ser matematicamente a fração $\frac{2}{3}$ da corda em relação a corda inteira e a sua metade?

Resultado esperado pelo aluno: Para Pitágoras $\frac{2}{3}$ significa a média harmônica entre a peça metálica inteira e sua metade.

O que vem ser matematicamente a fração $\frac{3}{4}$ da corda em relação a corda inteira e sua metade?

Resultado esperado pelo aluno: Para Pitágoras $\frac{3}{4}$ significou a média aritmética entre o todo e sua metade. O todo supõe-se que seja 12 kg.

Repare que ao mudar o som produzido pelo metal para o som produzido pela corda esticada que provavelmente não era de metal, Pitágoras está fazendo uso da técnica da imagem mental que é uma ferramenta da técnica de resolução de problemas ou seja o “conjunto de todas

as imagens do som”. Os resultados obtidos por Pitágoras nessa investigação foram os seguintes algarismos:

1º A metade da corda são equivalente ao som produzido pela corda inteira, apenas é mais agudo.

2º A média harmônica, entre a corda inteira e a sua metade é exatamente $\frac{2}{3}$ do seu comprimento.

3º A média aritmética entre a corda inteira e a sua metade é exatamente $\frac{3}{4}$ do seu comprimento.

Após criar essas quatro notas musicais consonantes, Pitágoras tem um novo problema a resolver como encontrar outras notas musicais partindo das quatro que ele havia descoberto.

Na compreensão do problema, Pitágoras considerou as 4 notas por ele descoberto, para a construção de uma estratégia de resolução, Pitágoras sabia que se ficasse dividindo ao meio só ia encontrar outras notas equivalentes, então resolveu adotar a fração $\frac{2}{3}$ como unidade padrão de sua escala musical.

Na execução das estratégias ele calculou $\frac{2}{3}$ da corda e encontrou a nota chamada de quinta justa partindo da quinta justa ele encontrou $\frac{4}{9}$ e essa fração é menos que a metade da corda e como ele sabia que ao dividir a corda ao meio encontrava-se uma nota equivalente uma oitava acima então ele multiplicou a nota $\frac{4}{9}$ por 2 para encontrar a nota uma oitava abaixo, assim obteve a nota $\frac{8}{9}$ e procedeu dessa maneira até chegar na nota $\frac{128}{243}$.

$$N = \{\text{Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si}\}$$

$$T = \{1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{16}{27}, \frac{128}{249}\}$$

Na revisão de sua descoberta, Pitágoras constatou que esse princípio poderia ser aplicado para instrumentos de sopro, agora com a vantagem de todos os instrumentos usarem a mesma escala, essa foi a grande contribuição de Pitágoras para a música.

8.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Nem tudo são flores, mas toda rosa tem um espinho, a escala de Pitágoras apresentava uma falha na folha que ficou conhecida como COMA PITAGÓRICO, isso significa a impossibilidade de partir da nota Fá e chegar na nota Dó como foi feito de Dó para Sol.

Agora o problema é criar uma nova escala para resolver o problema do COMA PITAGÓRICO.

Objetivo: Utilizar a modelagem matemática para desenvolver uma função que seja bijetora para relacionar notas e a distância entre elas.

Uma das justificativa era relacionar o conhecimento matemático que havia avançado bastante desde Pitágoras, pois esse negava a existência de números irracionais para resolver essa falha da escola Pitagórica.

Metodologia: 7 passos para modelagem matemática.

- Passo 1: Definir o problema Coma Pitagórico.
- Passo 2: Coletas de dados.
- Passo 3: Elaboração do modelo.
- Passo 4: Verificação do modelo matemático.
- Passo 5: Otimização e tomadas de decisão.
- Passo 6: Comunicação do modelo a gestão.
- Passo 7: implementação do modelo e modelo matemático foi o isomorfismo dado por $f(x) = (\sqrt[7]{2})^x \cdot \frac{L}{2} f(x)$, função exponencial de base irracional, onde L é o comprimento da corda total e X é a posição da nota musical, ou seja, X é natural pertencente ao conjunto: $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ isso para as sete notas musicais.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve a intenção de valorizar e incentivar o conhecimento da matemática, mais precisamente, o conceito de função e como também responder aquele questionamento inicial: “ É possível um outro caminho para a construção do conceito de função a partir de atividades investigativas, resolução de problemas e modelagem, valorizando a participação ativa do educando no processo de construção do conhecimento? ”

Para isso foi realizado esta pesquisa de cunho bibliográfico, com enfoque qualitativa, objetivando um melhor entendimento do conceito de função por parte do aluno e o caminho a ser seguido, tanto na investigação, resolução de problemas ou modelagem matemática, tem uma importância muito grande na aprendizagem do aluno, podemos dizer que o caminho e a jornada é mais importante que a própria resolução encontrada, é como uma viagem de férias bem planejada, pois o próprio percurso deve ser deleitado como se fosse às férias em si.

Foram sugeridas algumas atividades que podem ser usadas para criar oportunidades de observação e avaliação dos alunos, a fim de que o professor de maneira adequada possa planejar o ensino da melhor forma possível, e que podem sobretudo ser utilizado em um laboratório de matemática, e se houver condição de fabricação de um protótipo, como aqueles que foram construídos de material reciclável exclusivamente para esta pesquisa (o Bigorriho, o Monocórdio, o aparelho de medição de volume e o Metalofone) isso irá proporcionar uma parte lúdica, pois segundo Smole :

Para viabilizar o trabalho com situações problema, é preciso ampliar as estratégias e os materiais de ensino e diversificar as formas e organizações didáticas para que, junto com os alunos, seja possível criar um ambiente de produção ou de reprodução do saber. (SMOLE,2008, pg.14)

Dessa forma, o efeito que este trabalho irá produzir dependerá unicamente daqueles que buscam algo que possa melhorar cada vez mais o modo de se ensinar o conceito de função, pois foi lançada uma ideia que não representa uma sistematização final e sim uma oportunidade de buscar e formular problemas voltados para o cotidiano do aluno e principalmente uma abordagem de assunto em estudo que ativa a flexibilidade e a capacidade de compreensão na mente dos educandos.

Posso garantir que, a partir desta pesquisa, o meu olhar para a matemática será diferente, pois acredito que a busca por melhorias no processo ensino aprendizagem fortalecerá cada vez

mais o meu relacionamento com os alunos em se tratando de matemática, e estes por sua vez serão os agentes ativos de sua aprendizagem.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA**, Lourdes Werle de; **SILVA**, Karina Pessôa; **VERTUAN**, Rodolfo Eduardo. Modelagem Matemática na educação básica. São Paulo: Editora Contexto, 2013.
- BARBOSA**, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2001.
- BENNETT, ROY**. Uma breve história da música (1ª edição). Rio de Janeiro: Ed. Zahar. 1986.
- BASSANEZI**, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2006.
- BIEMBENGUT**, Maria Salett; **Hein** Nelson. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Contexto, 2013.
- BRASIL**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.
- BRASIL**. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997
- BOYER**, Carl Benjamin. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. Ed. EDGAR BLUCHER Ltda. (Ed. da Universidade de São Paulo). São Paulo: 1974.
- BOYER**, Carl Benjamin. Tópicos de História da Matemática para uso na sala de aula – Cálculo. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora. 1992.
- BURAK**, D. Formação dos pensamentos algébricos e geométricos: uma experiência com modelagem matemática. Pró-Mat. – Paraná. Curitiba, v.1, n.1, p.32-41, 1998.
- D'AMBRÓSIO**, B. S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates, SBEM, ano II, n. 2. 1989.
- DANTE**, Luiz Roberto. Matemática- contexto e aplicações. Vol. 01. Livro do Professor. São Paulo: Editora Ática. 2000.
- DOMINGUES**. H. Higyno. **IEZZI**, Gelson. Álgebra Moderna. São Paulo: Atual, 2003.
- EVES**, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.
- IEZZI**, Gelson, 1939. **Fundamentos de matemática**. São Paulo: atual, 1993.
- LIMA**, Elon Lages et al. *A matemática do Ensino Médio*. Vol. 01. 9.ed. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro: 2006.
- _____, Elon Lages et al. *A matemática do Ensino Médio*. Vol. 02. 9.ed. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro: 2006.

LOPES, Leide MariaLeão. *Imagem de conceito e definição de conceito: um olhar sobre o ensino de Geometria Analítica no ensino superior*. XXI EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes da Pós – graduação em Educação Matemática. Artigo. 2017. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/10/gd04_Leide_Lopes.pdf. Acessado em: 20/07/2022.

SMOLE, Kátia Stocco. Jogos de matemática de 1º a 3º ano – Porto Alegre: Grupo A,2008.

MACIEL, Paulo Roberto C. *A construção do conceito de função através da História da matemática*. Dissertação de Mestrado. Centro Federal de Educação Tecnologia-CEFET-RJ. 2011.

MARGARINUS, Renata. Uma proposta para o ensino de funções utilizando objetos de aprendizagem. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Maria- UFSM. Santa Maria, 2013.

OLIVEIRA. Nanci. Conceito de função: Uma abordagem do Processo Ensino – aprendizagem. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. São Paulo. 1997.

ONUCHIC, L. R.; **ALLEVATO**, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*, v. 25, n; 41, 2011.

PITOMBEIRA, João Bosco; **ROQUE**, Tatiane. *Tópicos de História da Matemática* Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

POLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da. Et al. Investigações matemáticas na sala de aula. 3ª ed.(Revista e ampliada). Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

ROQUE, Tatiana. História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar, 2012.

ROSSINI, Renata. Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias. 2006. Tese (Doutorado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2006.

ROSSINI, Renata. Os professores e o Conceito de Função: Uma Investigação à luz da Teoria Antropológica do Didático [20--]. Disponível em: http://www.ufrjr.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/professores.pdf. Acessado em 14 de Junho de 2016.

TRINDADE, J. O, MORETTI, M.T., Uma Relação Entre a Teoria Histórico – cultural e a Epistemologia Histórico – crítica no Ensino de Funções: A Mediação. In: Zetetike. Campinas, SP: UNICAMP-FE- CEMPEM, no 13/14, vol.8,7-28, Jan/Jun - 2000.

YOUSCHKEVITCH, A. P. Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle. In: Fragments d'histoire des Mathématiques, Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p.7- 67, 1981.