UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CAMPUS MARCO ZERO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL PROFMAT

PAULO AFONSO PANTOJA BORGES

ENSINO DE RECORRÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS, UTILIZANDO A METODOLOGIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Macapá-AP
2022

PAULO AFONSO PANTOJA BORGES

ENSINO DE RECORRÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS, UTILIZANDO A METODOLOGIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco.

Macapá-AP
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Maria do Carmo Lima Marques – CRB-2 / 989

B726e Borges, Paulo Afonso Pantoja.
Ensino de recorrência de primeira ordem na educação de jovens e adultos, utilizando a metodologia da engenharia didática / Paulo Afonso Pantoja Borges. Macapá: Unifap, 2022.
1 recurso eletrônico. 81 folhas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá, PROFMAT, Macapá, 2022.
Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco.

Modo de acesso: World Wide Web.
Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Engenharia didática. 2. Resolução de Problemas. 3. Recorrências e Educação de Jovens e Adultos. I. Chamilco, Eulalio Isla, orientador. II. Universidade Federal do Amapá. III. Título.

CDD 23. ed. – 374.8

BORGES, Paulo Afonso Pantoja. **Ensino de recorrência de primeira ordem na educação de jovens e adultos, utilizando a metodologia da engenharia didática**. Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco. 81 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós Graduação de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de Paulo Afonso Pantoja Borges intitulada: "***Uma engenharia didática sobre recorrências de 1ª ordem na educação de jovens e adultos (EJA - MÉDIO): resolução de problemas de progressões aritmética e geométrica***", após terem inquerido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÂO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Macapá, 07 de novembro de 2022.

Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco
Presidente da Banca Examinadora (PROFMAT-UNIFAP)

Ítalo Bruno Mendes Duarte
Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte
Avaliador Externo (UEAP)

Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Avaliador interno (PROFMAT-UNIFAP)

MACAPÁ/AP /2022

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha família que sempre acreditaram em mim, em especial à minha avó Domingas, à minha mãe e à minha esposa Selma Lucas de Alfaia.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, pela saúde e pelas forças dadas para terminar este trabalho e curso.

À minha família e amigos por todo o apoio.

Aos professores do colegiado de Matemática da UNIFAP e convidados, em especial ao prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco.

Aos colegas da turma 2019, pois foram muitos firmes e aconselhadores na hora da tomada de decisões.

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

O presente estudo tem como principal foco abordar o conceito de recorrência linear de 1ª ordem, mais particularmente à resolução de problemas de progressões aritméticas e geométricas, para alunos da 2ª Etapa (2ª e 3ª séries do Ensino Médio) da Educação de Jovens Adultos (EJA), através de uma sequência didática de ensino baseada na metodologia da Engenharia Didática. Para tanto, definiram-se os seguintes objetivos específicos: conceituar a engenharia didática e sua contextualização histórica; conceituar a resolução de problemas matemáticos; apresentar o ensino da educação de jovens e adultos no Brasil; definir progressões aritméticas, geométricas e recorrências de primeira ordem; e analisar se os alunos da turma pesquisada conseguem resolver problemas específicos de progressões aritméticas e geométricas, e se compreendem o conceito de recorrência de primeira ordem. Tal tema, justifica-se pelo fato dos alunos da educação de jovens e adultos não terem muitos livros didáticos adaptados à modalidade e à sua disposição, pois quaisquer materiais produzidos para essa modalidade são de muita valia. O presente estudo consiste em pesquisa de caráter descritivo, com resultados apresentados de forma qualitativa e quantitativa, a partir da coleta de informações de fontes primárias e secundárias. Com o levantamento de informações ao longo da pesquisa e da análise das informações, foi possível concluir que os alunos da EJA conseguem compreender e resolver problemas matemáticos, desde que haja uma aula bem planejada e que os conceitos sejam bem colocados para eles, o mesmo acontece com aplicação do conceito de recorrência de primeira ordem, porém muitos estudos e trabalhos ainda têm que ser feitos e divulgados para a modalidade da Educação de Jovens e Adultos.

Palavras-chave: Engenharia didática; Resolução de Problemas; Recorrências e Educação de Jovens e Adultos.

ABSTRACT

The main focus of this study is to address the concept of 1st order linear recurrence, more particularly the resolution of problems of arithmetic and geometric progressions, for students in the 2nd Stage (2nd and 3rd grades of High School) of Young Adult Education (EJA), through a didactic teaching sequence based on the methodology of Didactic Engineering. Therefore, the following specific objectives were defined: to conceptualize didactic engineering and its historical context; conceptualize the resolution of mathematical problems; present the teaching of youth and adult education in Brazil; define arithmetic, geometric progressions and first-order recurrences; and to analyze whether the students in the researched group are able to solve specific problems of arithmetic and geometric progressions, and if they understand the concept of first-order recurrence. This theme is justified by the fact that students of youth and adult education do not have many textbooks adapted to the modality and at their disposal, as any materials produced for this modality are of great value. The present study consists of a descriptive research, with results presented in a qualitative and quantitative way, from the collection of information from primary and secondary sources. With the collection of information throughout the research and analysis of the information, it was possible to conclude that EJA students are able to understand and solve mathematical problems, as long as there is a well-planned class and that the concepts are well placed for them, the same happens with application of the concept of first-order recurrence, but many studies and works still have to be done and disseminated for the Youth and Adult Education modality.

Keywords: Didactic engineering; Problem solving; Recurrences and Youth and Adult Education.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho tem-se como foco principal aplicar a metodologia da Engenharia Didática sobre recorrência de primeira ordem na Educação de Jovens e Adultos (EJA - Médio) e resolução de problemas de progressões aritméticas e geométricas. Tal metodologia, que é a prática do educador em consonância com a prática de um engenheiro, conforme Artigue (1996 apud Pais 2008, pg. 78)[14], deixa clara essa analogia quando diz que a engenharia didática expressa uma forma de trabalho didático comparável com o trabalho do engenheiro na realização de um projeto arquitetônico, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Sendo assim, a metodologia foi aplicada sobre o conteúdo do programa (PROFMAT) que é a recorrência de primeira ordem e os conteúdos do ensino médio que são progressões aritméticas (PAs) e progressões geométricas (PGs), cujo objetivo central é a generalização por recorrência e a resolução de problemas das referidas progressões.

Tem-se com isso, que a discussão sobre o estudo das recorrência de primeira ordem sobre progressões aritméticas (PAs) e progressões geométrica (PGs) para EJA, justifica-se pelo fato dos alunos da educação de jovens e adultos não terem muitos livros didáticos adaptados à modalidade e à sua disposição sobre o tema, e dos livros que têm, os assuntos de progressão aritmética e geométrica são uma versão copiada do ensino médio regular, com assuntos providos apenas de fórmulas e exercícios de fixação, fato esse que motivou na escolha deste tema, logo, a sequência didática criada neste trabalho, servirá de suporte e material aos professores de matemática da modalidade. Sendo assim, este trabalho de pesquisa estabeleceu como objetivo geral aplicar o conceito de recorrência de 1ª ordem e resoluções de problemas de progressões aritméticas e geométricas para 30 alunos da 2ª Etapa (2ª e 3ª séries do Ensino Médio) da Educação de Jovens Adultos (EJA), através de uma sequência didática de ensino baseada na metodologia da Engenharia Didática.

Para alcançar o objetivo geral, os objetivos específicos serão: conceituar a engenharia didática e sua contextualização histórica; conceituar a resolução de problemas matemáticos; apresentar o ensino da Eduacação de Jovens e Adultos (EJA) no Brasil; definir progressões aritméticas, geométricas e recorrências de primeira ordem; e analisar se os alunos da turma pesquisada conseguem resolver problemas específicos de progressões aritméticas e geométricas e, na sequência didática, compreendem o conceito de recorrência linear de primeira ordem.

A pesquisa foi realizada seguindo as quatro fazes da Engenharia Didática: análise preliminar, concepção e analise a priori, sequência didática e analise a posteriori.

Na análise preliminar, foi aplicado um questionário oral e escrito (apêndice A) para os alunos sobre os conteúdos progressões aritméticas e geométricas, com o objetivo de saber se os mesmos já tinham estudado algo sobre tais sequências, logo depois de analisadas as respostas, foi necessário passar uma revisão sobre PA e PG (apêndice C e D), pois os procedimentos e aplicações deste trabalho precisavam de conhecimentos prévios dos alunos.

Na concepção e análise a priori foi aplicado um questionário com problemas sobre PA e PG (apêndice B), levando em consideração que os alunos já tinham assistido as aulas de revisão, para verificar o grau de habilidades dos educandos sobre tal conteúdo, pois estava-se prepando os educandos para compreender o conceito de recorrências e sua relação com PA e PG.

A sequência didática foi aplicada após a etapa anterior, pois de acordo com as respostas dadas nas duas etapas anteriores é que foi possível perceber o grau de habilidades dos alunos, para assim, ser construída uma sequência didática de acordo com nível dos mesmos, visando o sucesso da pesquisa. É nesta etapa que foi feita a aplicação das 4 fases da resolução de problemas do subtema (resolução de problemas de PA e PG) alinhada ao conceito de recorrência de primeira ordem (apêndice E).

Por fim, a análise a posteriori e validação (apêndice F), onde foi feito um último questionário de avaliação da sequência didática, cujo objetivo principal na pesquisa foi fazer o confronto com o questionário a priori(2ª etapa) para podemos validar os resultados.

1.1 Objetivos da pesquisa

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa é aplicar o conceito de recorrência de 1ª ordem e resoluções de problemas de progressões aritméticas e geométricas, para 30 alunos da 2ª Etapa (2ª e 3ª séries do Ensino Médio) da Educação de Jovens Adultos (EJA), através de uma sequência didática de ensino baseada na metodologia da Engenharia Didática.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Conceituar a Engenharia Didática e sua contextualização histórica;
- Conceituar a resolução de problemas matemáticos;
- Apresentar o ensino da Eduacação de Jovens e Adultos (EJA) no Brasil;
- Definir Progressões Aritméticas, Geométricas e Recorrências de Primeira Ordem;
- Analisar se os alunos da turma pesquisada conseguem resolver problemas específicos de Progressões Aritméticas e Geométricas, e compreendem conceito de recorrência de primeira ordem.

1.1.3 Justificativa

A escolha deste tema, se deu pelo fato dos alunos da educação de jovens e adultos não terem muitos livros didáticos adaptados à modalidade e à sua disposição, pois tem-se relatos da coordenação pedagágica e de professores da escola pesquisa, entre outras, que num período de 10 anos ou mais, desde 2013 até 2022, não se tem um livro padrão que ensinasse de forma apropriada os assuntos matemáticos; e dos livros que têm, os assuntos de progressão aritmética e geométrica são uma versão copiada do ensino médio regular, com assuntos providos apenas de fórmulas e exercícios de fixação.

Com isso, a sequência didática criada neste trabalho, através da metodologia da engenharia didática, servirá de suporte aos professores de matemática da modalidade de ensino da educação de jovens e adultos, que é aplicar os conteúdos de progressões aritméticas e geométricas com a vertende didática e metodológica da resolução de problemas, e o conceito recorrência linear de primeira ordem para a generalização da progressões estudadas.

Em termos mais formais e que ajudam na execução de deste trabalho e no fortalecimento dessa justificativa é a Resolução CNE/CP N$^{\underline{o}}$ 2, de 20 de dezembro de 2019, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Professores para a Educação Básica e estabelece a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação) institui, em consonância com outros marcos regulatórios, em especial com a BNCC.

I - a formação docente para todas as etapas e modalidades da Educação Básica como compromisso de Estado, que assegure o direito das crianças, jovens e adultos a uma educação de qualidade, mediante a equiparação de oportunidades que considere a necessidade de todos e de cada um dos estudantes; (Brasil, 2019, p. 3)[7].

Sendo este um dos princípios relevantes para a política de formação de professores para a Educação Básica no Brasil.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Engenharia Didática

O surgimento da engenharia didática foi por volta de 1980 e teve como a principal escritora Michèle Artigue, tal metodologia une a teoria com a prática em sala de aula, em analogia à prática de um engenheiro com a prática de um professor pesquisador em didática, conforme Artigue (1996 apud Pais 2008, pg. 78), "a ideia da engenharia didática subentende a analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto".[14]

Segundo ALVES (2013):

> O conceito Engenharia Didática foi criado por Brousseau (1981) e amplamente estudado, desenvolvido e divulgado por Artigue (1988) e tem se constituído como uma metodologia de investigação científica que procura "extrair relações entre pesquisa e ação [...], sobre o sistema baseado em conhecimentos didáticos preestabelecidos" (Artigue, p. 2, 1988).[1]

A engenharia didática está diretamente relacionada com a teoria e a prática e isso faz com que essa metodologia seja considerada uma das mais importante na educação matemática, pois tudo que se pensa e planeja depois é aplicado na prática, conforme ALVES (2013, pg. 02):

> Com uma concepção que contempla tanto a dimensão teórica como experimental, a Engenharia Didática, consegue interligar o plano teórico da racionalidade à experimentação da prática educativa, numa execução que envolve desde o pensar das ideias iniciais até a prática, que no caso do professor pesquisador, será quase sempre em sala de aula.[1]

2.1.1 As quatro fases da engenharia didática

A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa que está diretamente relacionada com a teoria e a prática em sala de aula, e para que isso ocorra de forma sistemática, se faz pela execução de quatro fases consecutivas: análise preliminar, concepção e análise a priori, sequência didática e finalmente análise a posteriori e validação.

- **Análise Preliminar**

A análise preliminar consiste em fazer uma observação analítica no contexto geral do ensino, no que diz respeito às ferramentas didáticas de ensino do professor, da escola e dos alunos, tais como: livros didáticos, plano de curso, plano de aula, os assuntos já abordados sobre o tema em questão, o modo como estão sendo colocados os conteúdos, etc. Com isso, tem-se uma noção do que se pode desenvolver no decorrer do trabalho. Conforme CARDOSO (2012, p. 143):

> A análise preliminar tem como objetivo analisar e compreender o funcionamento do ensino onde a experiência será realizada, bem como propor uma intervenção satisfatória que modifique para melhor a realidade da sala de aula. A análise é feita tendo em vista o referencial teórico adotado pelo pesquisador e os conhecimentos didáticos adquiridos sobre o tema específico.[6]

Para melhor organizar a análise preliminar, tem-se segundo Artigue (1996, p.202).

> • a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> • a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
> • a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
> • a análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
> • e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.[2]

Logo, percebe-se a importância desta fase, pois foi pensado em uma maneira de se chegar no local de aplicação da pesquisa e coletar as primeiras impressões sobre as características estruturais, didáticas e comportamentais da escola, dos professores e alunos, para este último, no que diz respeito aos conhecimentos preliminares sobre o assunto específico que será abordado. Para Machado (1999 apud DE MATOS FILHO, 2015, p. 04), "as análises prévias são desenvolvidas principalmente para fundamentar a concepção da engenharia. É claro que cada uma delas ocorrerá ou não, dependendo do objetivo da pesquisa, e este determinará o grau de profundidade dessas análises ."[8]

- **Concepção e Análise a Priori**

Nesta fase tem-se que definir as variáveis que serão aplicadas na sequência didática, ou seja, é aqui que será feito um estudo que consiste na definição das variáveis locais e gerais, tais variáveis servirão de suporte para a criação do que é ou não pertinente sobre o objeto de estudo na aplicação da sequência didática.

Conforme Artigue (1996 apud Pais, 2008, p. 80);

> "... consiste na definição de um certo número de variáveis de comando, que podem ser globais ou locais. As variáveis no âmbito local descrevem cada atividade proposta, e estão relacionadas com o planejamento específico de uma sessão, relacionando as situações didáticas propostas com previsões a respeito do comportamento dos estudantes. Ao mesmo tempo, são formuladas hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para a validação da engenharia."[14]

Ainda segundo Artigue (1996 apud Pais (2008)) sugere uma distinção entre as variáveis globais e as locais. As variáveis locais são aquelas que dizem respeito ao planejamento específico de uma sessão da sequência didática, restrita a uma fase da pesquisa.

Há ainda a sugestão de uma segunda diferenciação entre as variáveis gerais ou dependentes do conteúdo trabalhado. Quando se trata da dimensão micro didática, esta segunda diferenciação torna-se mais evidente, pois podemos falar nas variáveis do problema em si e das variáveis associadas ao meio que estrutura o fenômeno. É sobre o conjunto dessas variáveis que se inicia a análise a priori, cujo objetivo é determinar quais são as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão.[14]

- **Sequência Didática**

A sequência didática é a aplicação do que foi feto nas duas etapas anteriores, isto é, todo o levantamento a cerca do que seria aplicado, em relação aos conteúdos, comportamentos cognitivos dos alunos, a prática pedagógica da escola; é nesta etapa que se põe em prática a sequência de aulas planejadas para posteriormente analisa-las. Conforme Pais (2008, Pg. 80).

> "Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de sessões, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado."[14]

Com isso, percebe-se que as chamadas sessões são aulas bem planejadas e que não se assemelham às aulas consideradas rotineiras. Além disso, tais sessões têm que ser bem observadas e registradas, pois é nesta e na etapa posterior, que o pesquisador organizará os relatórios finais para análises e apresentação dos resultados, no que diz respeito à validação e considerações finais. Conforme Pais (2008, Pg. 80):

> "... é preciso defender o princípio de que as circunstâncias reais da experiência sejam claramente descritas no relatório final da pesquisa. Muitas pesquisas exigem a observação direta de atividades realizadas pelos alunos, o que não é uma atividade evidente de ser registrada, tendo em vista as diversas relações nelas envolvidas. Por exemplo, o registro de atividades, envolvendo a manipulação de materiais didáticos, tais como os sólidos geométricos, exige um cuidadoso estudo preliminar para ampliar a confiabilidade da análise. Algumas dessas realizações podem ser filmadas, gravadas e outras apenas descritas pelo pesquisador."[14]

Portanto, segundo Pais (2008), logo após o planejamento da sequência didática, com o objetivo de colocar em prática tudo o que foi elaborado, tem-se que determinar os meios de registros dos dados da experimentação. Tais dados, podem ser observados pelas produções dos alunos ou nas sessões de ensino, através de gravações em vídeos e áudios, anotações, além do uso de questionários, entrevistas e testes individuais ou em pequenos grupos, realizados do começo ao fim da experimentação.[14]

- **Análise a Posteriori e Validação**

A fase da análise a posteriori, que é a fase final da engenharia didática está diretamente relacionada às fases anteriores, pois aqui será feito o estudo e análise de tudo o que foi colocado anteriormente, isto é, com o levantamento de novos dados do que realmente se quer chegar na pesquisa, estes dados serão coletados e confrontados com os da análise a priori, partindo é claro, da sequência didática aplicada em sala de aula.

Ainda Pais (2008, Pg. 81) reitera que:

> Esses dados podem ser obtidos pela observação direta do pesquisador ou da equipe de aplicação da experiência, desde que sejam devidamente registrados, de forma objetiva, nos protocolos da experiência. O importante é que a analise atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio. A análise a posteriori tende a enriquecer, quando possível, complementar os dados obtidos por meio de outras técnicas, tais como, questionários, entrevistas, gravações, diálogos, entre outros.[14]

Como a validação dos resultados é obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise a priori e a posteriori, verificando das hipóteses feitas no início da pesquisa conforme, Pais (2008). Tem-se dois pontos a considerar em relação ao modo de coleta e análise de dados, tais que, se a opção fosse uma abordagem estatística, por exemplo, a validação corresponderia à confrontação dos resultados entre o grupo experimental e o grupo de controle; do ponto de vista metodológico, a validação é uma etapa onde a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico. Dessa maneira, enquanto procedimento metodológico, a engenharia didática se fundamenta em registros de estudos de casos, cuja a validação é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada.[14]

2.2 Resolução de Problemas

Segundo Onuchi (et al 2021) o movimento de Resolução de Problemas (RP) como metodologia de ensino teve início na primeira metade do século XX, tendo os Estados Unidos como o país que a desenvolveu em sua forma teórica. Assim, tem-se como um primeiro conceito.[13]

> A RP, para além da prática de resolver problemas nas aulas de Matemática, pressupõe aulas de Matemática com professores e alunos envolvidos em comunidades de aprendizagem, desempenhando diferentes papéis e responsabilidades, visando a promover uma aprendizagem mais significativa (ONUCHI et al, 2021, Pg. 20).[13]

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (Brasil, 2018, p. 266).

De acordo com os PCNs, "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la" (BRASIL, 1997, p. 44).[4]

Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1997, p. 52).[4]

O professor Luiz Roberto Dante (2009 apud Rodrigues) definindo as funções de um exercício, afirma que "[...] serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas". (DANTE, 2009, p. 48).[16]

Segundo Villa e Callejo (2006):

> Um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova. (VILLA e CALLEJO, 2006, p. 29). [3]

2.2.1 As quatro etapas da resolução de problemas

Embora tenhamos vistos alguns conceitos sobre resolução de problemas de diferentes autores, neste trabalho vamos levar para sala de aula, na sequência didática, as quatro etapas propostas por George Polya (1978),pois segundo Onuchi (et al 2021) "[...]No ano de 1945, o livro - A arte de resolver problemas - teve sua primeira edição impressa e nele Polya apresentou uma sequência de quatro etapas que julgou serem aquelas que um resolvedor de problemas executa durante a resolução de qualquer problema: 1) compreender o problema; 2) estabelecer um plano; 3) executar o plano; e 4) examinar a solução obtida."[13]

- **1ª Fase** – Compreender o Problema – Essa etapa permite compreender claramente do que se trata o problema, podendo assim construir esquemas para organizar a situação proposta.

- **2ª Fase** – Estabelecimento de um Plano – Após a leitura e identificação do que o problema pede, os alunos tentarão relacionar os conhecimentos científicos que possuem, vistos em sala de aula, com o conhecimento cognitivo, ou seja, maneiras possíveis de obterem respostas para os problemas.

- **3ª Fase** – Execução do Plano – É uma das fases mais importantes no processo. Aqui, executa-se o plano, e as estratégias pensadas anteriormente. É o momento no qual o educando confirmará sua aprendizagem.

- **4ª Fase** – Examinar a solução obtida – Após chegarem a uma resposta, e realizado a correção. No caso de acerto, verifica-se, se realmente haviam seguido caminhos matemáticos permitidos e corretos e será mostrado outros métodos de resolução que poderiam ser utilizados. No caso de erro, pode-se trabalhar a resolução do problema com base no próprio erro. Aos poucos, os alunos perceberão o que estavam errando. O professor será o mediador do desenvolvimento das atividades propostas no projeto.[13]

2.3 A Educação de Jovens e Adultos (EJA) no Brasil

Começaremos esse capítulo, com a ideia colocada por HADDAD(1994 apud Onuchi 2021);

> A Educação de Adultos no Brasil se constituiu muito mais como produto da miséria social do que do desenvolvimento. É conseqência dos males do sistema público regular de ensino e das precárias condições de vida da maioria da população, que acabam por condicionar o aproveitamento da escolaridade na época apropriada. É este marco condicionante – a miséria social – que acaba por definir as diversas maneiras de se pensar e realizar a Educação de Jovens e Adultos. É uma educação para pobres, para jovens e adultos das camadas populares, para aqueles que são maioria nas sociedades do Terceiro Mundo, para os excluídos do desenvolvimento e dos sistemas educacionais de ensino.(HADDAD, 1994, p. 86).[13]

2.3.1 Contexto histórico

Segundo Di Pierro et al (2021), a EJA já possuía algumas normativas na constituição de 1934 e se fortaleceu a partir da década de 1940, com a criação do Fundo Nacional de Ensino Primário em 1942, do Serviço de Educação de Adultos e da Campanha de Educação de Adultos, ambos em 1947, da Campanha de Educação Rural iniciada em 1952 e da Campanha Nacional de Erradicação do Analfabetismo em 1958. Em 1964, o Ministério da Educação organizou o último dos programas de corte nacional desse ciclo, o Programa Nacional de Alfabetização de Adultos, cujo planejamento incorporou largamente as orientações de Paulo Freire.[9]

Nos anos 40, segundo Freire (apud Gadotti, 1979, p. 72), a Educação de Adultos era entendida como uma extensão da escola formal, principalmente para a zona rural. Já na década de 50, a Educação de Adultos era entendida como uma educação de base, com desenvolvimento comunitário. Sendo assim, no final dos anos 50, aparecem duas expressivas tendências para a Educação de Adultos: a Educação de Adultos compreendida como uma educação libertadora idealizada por Paulo Freire e a Educação de Adultos entendida como educação profissional.gadotti1979

Com isso, em tempos mais atuais, de acordo Lei de Diretrizes e Bases (LDB), nº 9394/96, temos um primeiro conceito sobre a Educação de Jovens e adultos, que é uma modalidade de ensino voltada para os alunos que não terminaram seus estudos na idade própria. Em conformidade com a Constituição Federal de 1988, tem-se a Lei de Diretrizes e Bases (LDB), nº 9394/96, que mostra em seu artigo 37, como funciona e quem são os sujeitos dessa modalidade de ensino[4]:

> Art. 37. A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos nos ensinos fundamental e médio na idade própria e constituirá instrumento para a educação e a aprendizagem ao longo da vida.
> § 1º Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
> § 2º O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si.
> § 3º A educação de jovens e adultos deverá articular-se, preferencialmente, com a educação profissional, na forma do regulamento (Brasil, 1996).[4]

Com esta lei, temos que essa clientela tem o direito aos estudos, no momento que lhe for conveniente ao retorno para uma sala de aula, ou por exames de classificação e que o Poder Público tem de garantir o acesso e permanência na escola.

Tem-se como principal teórico para a EJA, Paulo Freire, pois segundo Scortegagna e Oliveira (2006)[17]:

> Freire, trazendo este novo espírito da época acabou por se tornar um marco teórico na Educação de Adultos, desenvolvendo uma metodologia própria de trabalho, que unia pela primeira vez a especificidade dessa Educação em relação a quem educar, para que e como educar, a partir do princípio de que a educação era um ato político, podendo servir tanto para a submissão como para a libertação do povo. (SCORTEGAGNA E OLIVEIRA 2006, p.5).[17]

Assim, percebe-se que Paulo Freire se preocupava em como ensinar e para quem ensinar na modalidade EJA, servindo para o aprendizado político e para a libertação do povo quanto a submissão. Conforme Freire (1983, p.12): "uma educação para a decisão, para a responsabilidade social e política."[10]

Ainda segundo Freire (1983, apud Scortegagna e Oliveira, 2006)[17], não era por causa que o país era subdesenvolvido, que adulto era analfabeto, mas sim por uma sociedade injusta e desigual, de um sistema que buscava reproduzir, pela educação, o poder das elites políticas, econômicas e sociais do país.[17]

Por fim, a concepção de Freire, "a construção de uma nova sociedade não poderá ser conduzida pelas elites dominantes, incapazes de oferecer as bases de uma política de reformas, mas apenas pelas massas populares que são a única forma capaz de operar a mudança". (FREIRE, 1983, p.34).[10]

2.4 Progressões Aritméticas

Comecemos este tópico com o problema abaixo:

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumentou mensalmente sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho?[12]

Solução: A produção mensal, a partir de janeiro, são 400, 430, 460, 490, 520, 550, ... Em junho, a fábrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, racionando do modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta $5 \cdot 30 = 150$ veículos. Em junho, a fábrica produziu $400 + 150 = 550$ veículos.

A sequência (400, 430, 460, 490, 520, 550, ...) é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão de progressão. A razão da progressão acima é igual a 30.

A progressão aritmética é uma sequência especial, que possui um padrão regular na passagem de um termo para o outro, porém antes de vermos tal definição, temos que primeiramente conhecer o conceito de sequência.

2.4.1 Sequências Numéricas

Definição 1. *Uma sequência numérica é uma lista de números reais ordenada, através de índices de números naturais. Mais precisamente, uma sequência de números reais é dada por:*

$$(x_n) = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, \cdots,\, x_n,\, \cdots)$$

Em que cada x_i, é denominado i-ésimo termo da sequência, x_1 é o primeiro termo da sequência, x_2 o segundo termo assim e sucessivamente.[18]

Os números que compõem a sequência são chamados **termos** da sequência. A sequência pode ser finita, isto é, quando possui um último elemento x_n; ou infinita quando não possui o último elemento, conforme os exemplos 1 e 2, respectivamente.

Exemplo 1. *Sequência dos múltiplos de* 5 *positivos menores que* 20.

$$(x_n) = (5,\, 10,\, 15), \quad com\ x_n = 5n \ \ e\ n \in \{1,\, 2,\, 3\}.$$

De modo geral, uma sequência finita é denotada por:

$$(x_n) = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, ...,\, x_n)$$

Exemplo 2. *Sequência dos números pares positivos.*

$$(x_n) = (2,\, 4,\, 6,\, 8\, ...), \quad com\ 0 < x_n = 2n \ \ e\ n \in \mathbb{N}.$$

De modo geral, uma sequência infinita é denotada por:

$$(x_n) = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, ...,\, x_n,\, ...)$$

Exemplo 3. *(Banestes 2015). A senha de meu cofre é dada por uma sequência de seis números, todos menores que 100, que obedece a determinada lógica. Esqueci o terceiro número dessa sequência, mas lembro-me dos demais. São eles:* (32, 27, ___, 30, 38, 33). *Assim, qual o terceiro número da sequência?*

Resolução: Analisando a sequência, é possível verificar que os valores alternam-se subtraindo 5 e somando 8:

$$32 - 5 = 27$$

$$30 + 8 = 38$$

$$38 - 5 = 33$$

Logo, o terceiro número da sequência será dado por $27 + 8 = 35$.

2.4.2 Definição de Progressão Aritmética (PA)

Definição 2. *Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r.[12]*

As sequências (5, 8, 11, 14, ...) e (7, 5, 3, 1, ...) são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 3 e - 2.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois, ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos; $a_{12} = a_7 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = a_{17} - 13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a_{17} para a_4 e, de modo geral,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \tag{1}$$

pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n - 1$ termos.

A equação 1 é chamada termo geral da Progressão Aritmética, e temos nela a seguinte notação:
a_1: é o primeiro termo da PA;
a_n: é o último termo, termo geral ou n-ésimo termo PA;
n: é o índice do n-ésimo termo da PA (se ela for finita);
r: é a razão da PA.

Outra forma de deduzir o termo geral de uma PA é aplicando a definição 1, já começando com a ideia de recorrência, sendo assim,
Primeiro termo: $a_1 = a_1$
Segundo term:o $a_2 = a_1 + r$
Terceiro termo: $a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_3 = a_1 + 2r$
Quarto termo: $a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + a_4 = a_1 + 3r$

(...)

Continuando esse processo até n-ésimo termo (a_n). Logo nosso último termo será: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, que é o termo geral da PA.

Exemplo 4. *Seja a PA (5, 9, 13, 17, 21, 25), temos que:*

$a_1 = 5$
$n = 6$, como **n** é igual a 6, então essa PA tem 6 termos e nesse caso o último é:
$a_n = a_6 = 25$
$r = 4$

2.4.3 Soma dos termos da progressão aritmética

Um pouco de história:

Em uma pequena escola do principado de Braunschweig, Alemanha, em 1785, o professor Büttner propôs aos alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um garoto de apenas oito anos de idade aproximou-se do professor mostrando-lhe em sua prancheta o resultado. O professor, assombrado, constatou que o resultado estava certo. Aquele garoto viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Karl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por ele foi simples e elegante: o menino percebeu que a soma do primeiro número, 1 com o último, 100 é igual a 101; a soma do segundo número, 2 com o penúltimo 99, é igual a 101; a soma do terceiro número, 3 com o antepenúltipo, 98, é igual a 101; e assim por diante, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos. Como são possíveis 50 somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$$

Esse raciocínio, pode ser estendido para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão. Vamos à demonstração:

Em vez de somar os termos do mesmo modo que Gauss, reescreveremos a soma como outra soma de termos de PA logo abaixo dessa, de modo que o último termo fique abaixo do primeiro, o penúltimo fique abaixo do segundo e assim por diante.

$$Sn = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$Sn = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Observe que, se somarmos as duas expressões, teremos o dobro da mesma soma que Gauss fez.

$$\begin{array}{rl} & Sn = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + & Sn = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Daí, conforme a ideia de Gauss, os resultados dessas somas entre parênteses serão iguais aos do primeiro termo somado ao último (termos equidistantes). Portanto, sabendo que a soma dos termos equidistantes é igual a soma dos termos extremos, basta substituir todas as outras somas por $(a_1 + a_n)$. Logo, teremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Agora observa-se que, o número de parcela que temos é igual ao número de termos da PA, visto que duplicamos antes com a soma e agora quando juntamos os termos a dois a dois, temos exatamente o número de termos da PA, e ainda, como temos duas vezes a soma das parcelas, podemos reduzir a uma única soma de parcelas, que exatamente a soma dos termos da PA, veja:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \tag{2}$$

Na equação 2, temos a seguinte notação:

S_n: é a soma dos n termos de uma PA finita.

n: é o número de termos de uma PA finita.

a_1 e a_n: são, o primeiro e o último termos de uma PA finita, respectivamente.

Exemplo 5. *Dada a PA (2, 4, 6, 8, 10, ...), calcule a soma dos seus 100 primeiros termos. Para calcular essa soma, é necessário conhecer o último termo dessa PA. Para tanto, usaremos a fórmula do termo geral de uma PA.*

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{100} = 2 + (100 - 1) \cdot 2$$

$$a_{100} = 2 + 99 \cdot 2$$

$$a_{100} = 2 + 198$$

$$a_{100} = 200$$

Agora, usando a fórmula para soma dos n primeiros termos de uma PA, teremos:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{100} = \frac{100 \cdot (2 + 200)}{2}$$

$$S_{100} = \frac{100 \cdot (202)}{2}$$

$$S_{100} = \frac{20200}{2}$$

$$S_{100} = 10100$$

Portanto, a soma do 100 primeiros termos da PA dada é igual a 10100.

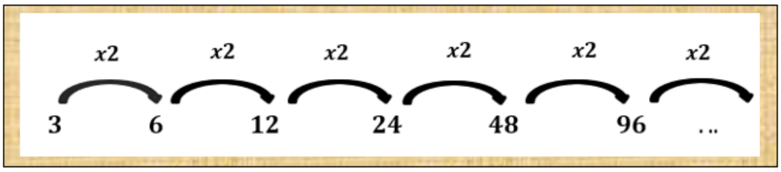
2.5 Progressões Geométricas

2.5.1 Definição de Progressão Geométrica (PG)

Definição 3. *Progressão geométrica (ou simplesmente PG) é uma sequência de números não nulos em que cada um deles, multiplicado por um número fixo, fornece o próximo elemento da sequência. Esse número fixo chama-se razão (q), e os elementos da sequência são os termos da progressão geométrica.[12]*

Exemplo 6. *Vamos obter os termos de uma progressão geométrica de razão* 2*, partindo do número* 3*. Observe a figura 1.*

Figura 1: Termos de uma PG de razão 2.



Fonte: Própria do Autor (2022)

Observe que: $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = 2$

Daí, tem-se que a razão **q** de uma P.G é qualquer termo, a partir do segundo, dividido pelo termo anterior. Como a razão q = 2, observe a regularidade que se obtém de um termo para o outro na figura 2 abaixo:

Figura 2: Regularidade do exemplo 6 da PG.

$$\begin{array}{lcl}
a_1 = 3 & & \\
a_2 = 3.2 = 6 & \longrightarrow & a_2 = a_1.2 \\
a_3 = 6.2 = 12 & \longrightarrow & a_3 = (a_1.2).2 = a_1.2^2 \\
a_4 = 12.2 = 24 & \longrightarrow & a_4 = (a_1.2^2).2 = a_1.2^3 \\
a_5 = 24.2 = 48 & \longrightarrow & a_5 = (a_1.2^3).2 = a_1.2^4 \\
a_6 = 48.2 = 96 & \longrightarrow & a_6 = (a_1.2^4).2 = a_1.2^5
\end{array}$$

Fonte: Própria do Autor (2022)

Exemplo 7. *Seja a PG dada por* (2, 4, 8, 16, ...) *,temos que* $a_1 = 2$*;* $q = 2$*.*

Exemplo 8. *Seja a PG dada por* $(-18,\ -6,\ -2,\ -\frac{2}{3},\ ...)$ *,temos que* $a_1 = -18; q = \frac{1}{3}$*.*

Agora vamos deduzir a fórmula do termo geral da PG, assim, seja uma P.G $(a_1, a_2, a_3,\ ..., a_{n-1},\ a_n)$, com razão q. Observe a regularidade na figura 3 abaixo, a partir da definição:

Figura 3: Regularidade da PG.

$$
\begin{array}{lllll}
a_1 = a_1 & & & & \\
a_2 = a_1.\ q & & \longrightarrow & & a_2 = a_1.q^1 \\
a_3 = a_2.\ q & \longrightarrow & a_3 = a_1.\ q.q & \longrightarrow & a_3 = a_1.q^2 \\
a_4 = a_3.\ q & \longrightarrow & a_4 = a_1.\ q^2.q & \longrightarrow & a_4 = a_1.q^3 \\
a_5 = a_4.\ q & \longrightarrow & a_5 = a_1.\ q^3.q & \longrightarrow & a_5 = a_1.q^4 \\
 & & (...) & &
\end{array}
$$

Fonte: Própria do Autor (2022)

Percebe-se que o termo que queremos, de uma PG, é igual ao primeiro termo multiplicado pela razão q elevado ao número do termos menos um, assim tem-se que;

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{3}$$

Na equação 3, tem-se a seguinte notação:
a_n: é o último termo, termo geral ou n-ésimo termo da PG.
a_1: é o primeiro termo da PG.
q: é a razão da PG.
n: é o índice do n-ésimo termo da PG.

Exemplo 9. *Uma sequência numérica orientada sob forma de multiplicação é composta por 6 elementos, onde o primeiro destes é 5 e a sua razão é 4. Determine o último termo desta sequência.*

Resolução: Identificando os termos e substituindo na equação 3, temos que:

$a_1 = 5 \quad q = 4$. Como $n = 6$, então queremos encontrar o termo denotado por a_6, logo:

$$a_6 = 5 \cdot 4^{6-1}$$

$$a_6 = 5 \cdot 4^5$$

$$a_6 = 5 \cdot 1024$$

$$a_6 = 5120$$

Pontanto, o último termo desta sequência é igual a 5120.

2.5.2 Soma dos termos da progressão geométrica

Vamos deduzir a fórmula da soma dos termos de uma PG finita, para a razão $q \neq 1$, sendo assim, considere a sequinte sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.

Agora seja S_n a soma dos n termos da PG, tal que,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Escrevendo a soma dos termos de S_n em função da razão q e de a_1, tem-se que:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \tag{4}$$

Sabemos que se multiplicarmos ambos membros de uma igualdade por uma constante, esta igualdade continuará válida. Então vamos multiplicar a equação 4 por uma constante de valor conveniente q, assim teremos:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \tag{5}$$

Observando as equações 4 e 5, notamos que a parcela a_1 só aparece em 4 e a parcela $a_1.q^n$ só aparece em 5. As demais parcelas são comuns entre as duas equações. Para que estas parcelas sejam eliminadas, subtraímos 4 de 5, logo,

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

Colocando S_n e a_1 em evidência em seus respectivos membros, temos:

$$S_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

Isolando S_n, chegamos a fórmula da soma dos n termos de uma progressão geométrica finita para $q \neq 1$.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q-1)} \tag{6}$$

Na equação 6 , tem-se a seguinte notação:
S_n: é a soma dos n termos da termos da PG finita, para $q \neq 1$.
a_1: é o primeiro termo da PG.
q: é a razão da PG.
n: é o número de termos da PG.

Exemplo 10. *Determine a soma dos oito primeiros termos da PG* $(2, 4, 8, 16, ...)$.

Resolução: Identificando todos os dados da questão e substituindo na equação 6, teremos:

$a_1 = 2, \quad q = 2$. Como $n = 8$, então encontraremos o termo denotado por S_8, logo:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$S_8 = \frac{2 \cdot (2^8 - 1)}{(2 - 1)}$$

$$S_8 = \frac{2 \cdot (256 - 1)}{(1)}$$

$$S_8 = 2 \cdot 255$$

$$S_8 = 510$$

Portanto, a soma dos oito primeiros termos é igual 510.

Quando falamos em soma dos termos de uma PG infinita, estamos nos restrigindo ao caso em que a razão esta entre, $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$, assim na equação 6, quando o número de elementos n cresce muito, se aproximando do infinito (∞), o termo q^n fica igual a zero, logo na referida equação 6 temos:

$$S_\infty = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{(q - 1)}$$

$$\Leftrightarrow S_\infty = \frac{a_1}{(1 - q)} \tag{7}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos da equação 7 será um número real $\dfrac{a_1}{(1 - q)}$.

Exemplo 11. *Determine a soma dos elementos da seguinte PG* $(4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ ...)$

Resolução: Identificando todos os dados do exemplo e substituindo na equação 7, teremos:

$a_1 = 4, \quad q = \frac{1}{4}$. Como n tende ao infinito, então queremos a soma infinita (S_∞), logo:

$$\Leftrightarrow S_\infty = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow S_\infty = \frac{4}{\frac{4 - 1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow S_\infty = \frac{4}{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow S_\infty = \frac{16}{3}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos dessa PG é igual $\dfrac{16}{3}$.

2.6 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Neste trabalho foi abordado apenas o conceito de recorrências lineares de primeira ordem, embora existam recorrências de segunda, de terceira, até de ordem k.

Começaremos com as definições de recorrência; recorrência linear de 1ª ordem homogênea e sua resolução; recorrência linear de primeira ordem não homogênea e sua resolução. Nas referidas definições, primeiro foi mostrado que as recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas generalizam as proressões geométricas, logo em seguida, foi colocado que as recorrências lineares de 1ª ordem não homogêneas generalizam as progressões aritméticas.

Definição 4. *Uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores.[15]*

Definição 5. *Uma recorrência de 1ª ordem é da forma:*

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n) \tag{8}$$

Isto é, a recorrência 8 expressa a_{n+1} em função de a_n. Ela é dita linear, se, e somente se, essa função for do primeiro grau.[15]

2.6.1 Recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas

As recorrências são ditas homogêneas, quando não possuírem termo independente de a_n, assim, na equação de recorrência 8, temos que $f(n) = 0$ para que a recorrência de 1ª ordem seja homogênea[15], logo:

$$a_{n+1} = g(n)a_n \tag{9}$$

Particularizando ainda mais o nosso objeto de estudo, vamos nos interessar nas recorrências em que $g(n) = q$, tal que, q seja uma constante real. Com isso, restringimos a nossa recorrência, na seguinte,

$$\begin{cases} a_{n+1} = q \cdot \ a_n \\ a_1 = c \end{cases}$$

O que devemos entender da recorrência acima?

Que para encontrarmos um termo, multiplicamos o anterior por uma constante real q, e ainda temos que ter definido o primeiro termo, isto é, $a_1 = c$, com c uma constante real.

2.6.2 Resolução de recorrências lineares homogêneas

Resolver uma recorrência é encontrar como solução, uma *fórmula fechada*, tal que, esta servirá para encontrar qualquer termo da sequência definida por recorrência, não sendo mais necessário se chegar em determinadado termo, através do termo anterior.[15]

Exemplo 12. *Seja a recorrência linear homogênea de primeira ordem do tipo:*

$$a_{n+1} = g(n)a_n$$

Onde $g(n)$ e a_n são não-nulos. Podemos desenvolver a recorrência acima, da seguinte forma:

$$a_2 = g(1)a_1$$

$$a_3 = g(2)a_2$$

$$a_4 = g(3)a_3$$

$$(\vdots)$$

$$a_{n+1} = g(n)a_n$$

Multiplicamos membro a membro cada uma das equações e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot \quad ... \quad \cdot \; g(n)$$

Portanto,

$$a_{n+1} = a_1 \cdot \prod_{j=1}^{n} g(j)$$

Exemplo 13. *Seja a recorrência linear homogênea de primeira ordem do tipo:*

$$\begin{cases} a_{n+1} = q \cdot \; a_n \\ a_1 = c \end{cases}, \quad com \ c \ e \ q \in \mathbb{R}.$$

Vamos resolver esta recorrência de modo análogo a do exemplo 12, assim, tem-se que

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$

$$(\vdots)$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Agora multiplicamos membro a membro cada uma das equações, reduzindo em uma única equação, temos:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot a_n = \ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

Percebemos que no primeiro e no segundo membros temos apenas multiplicações, e ainda que, em ambos temos o produto $(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_{n-1})$. Logo, podemos simplificar ambos os lados chegando na seguinte fórmula fechada:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Portanto, a recorrência colocada nesse exemplo 13, generaliza as chamadas progressões geométricas.

2.6.3 Recorrências lineares de 1ª ordem não-homogêneas

Como já foi mostrado na definição 5 e na equação 8, a recorrência linear de 1ª ordem não homogênea tem uma característica a mais das homogêneas, ela além de depender exclusivamente de termos anteriores, a mesma ainda fica em função de um termo independente, assim uma recorrência linear de 1ª ordem não homogênea é da forma:

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$$

Porém, com o objetivo de particularizar esta recorrência ao estudo de Progressão Artmética, ficaremos com os casos em que $g(n) = 1$ e $f(n) = r$, com r uma costante real. Logo, teremos a seguinte recorrência:

$$\begin{cases} a_{n+1} = & a_n + r \\ a_1 = c \end{cases}$$

Entende-se a recorrência acima da seguinte forma: para encontrar qualquer termo, temos que adicionar uma constante real r ao termo anterior, sempre levando em consideração que $a_1 = c$, para c um número real dado.

2.6.4 Resolução de recorrências lineares de $1^{\underline{a}}$ ordem não-homogêneas

Vamos resolver uma recorrência linear não-homogênea de modo análogo à resolução da recorrêcia homogênea.

Exemplo 14. *Seja a recorrência linear de* $1^{\underline{a}}$ *ordem não-homogênea, equação 8, e colocada novamente abaixo:*

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$$

com $g(n) = 1$ *e* $f(n) \neq 0$. *Neste caso, a equação 8 assume a forma:*

$$a_{n+1} = 1 \cdot a_n + f(n)$$

Podemos então escrever:

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2)$$

$$a_4 = a_3 + f(3)$$

$$(\vdots)$$

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

Somando as igualdades e cancelando os termos semelhantes, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 + f(1) + f(2) + ... + f(n)$$

Portanto,

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{j=1}^{n} f(j)$$

Exemplo 15. *Seja a recorrência linear de* $1^{\underline{a}}$*ordem não-homogênea:*

$$\begin{cases} a_{n+1} = & a_n + r \\ a_1 = c \end{cases} \tag{10}$$

A equação de recorrência 10 é uma caso particular da recorrência do exemplo 14, isto é, $g(n) = 1$ e $f(n) = r$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. De modo análogo à resolução do exemplo anterior, tem-se que:

$$a_{n+1} = a_1 + nr$$

Portanto,

$$a_n = c + (n-1)r$$

Esta recorrência generaliza as chamadas progressões aritméticas.

3 METODOLOGIA

O presente estudo consiste em uma pesquisa de caráter descritivo, que visa aplicar o conceito de recorrência de 1ª ordem: resolução de problemas de progressões aritméticas e geométricas, para alunos da 2ª Etapa (2ª e 3ª séries do Ensino Médio) da Educação de Jovens Adultos (EJA), através de uma sequência didática de ensino baseada na metodologia da Engenharia Didática. Os resultados serão apresentados de forma qualitativa e quantitativa, a partir da coleta de informações de fontes primárias e secundárias. A planificação da pesquisa inclui, em primeiro lugar, o levantamento dos dados secundários (fundamentação teórica), para posterior contato com as fontes primárias (aplicação da engenharia didática), a fim de promover a coleta de dados em campo.

Figura 4: Esc. Est. Profª. Ruth de Almeida Bezerra

Fonte: Própria do Autor (2022)

Com isso, em seguida serão descritos os resultados (e comentados) da aplicação da engenharia didática executada na Escola Estadual Professora Ruth de Almeida Bezerra, ver figura 4, situada na zona norte da cidade Macapá, bairro: São Lázaro, em uma sala de aula com 30 alunos da 2ª Etapa, de acordo com a metodologia intrínseca de cada fase, mas é claro, não deixando de interligar as referidas etapas, que são: análise preliminar, concepção e análise a priori, sequência didática e finalmente análise a posteriori e validação. A aplicação das fases foram de nos meses de junho, agosto e setembro de 2022. Nos dias 10 a 30 de junho, foram feitos o questiorário da 1ª fase e a revisão de sequências numéricas e PA(12 horas aulas); dos dias 01 a 15 de agosto, revisão de PG (8 horas aulas); dos dias 16 a 20 de agosto, aplicação do questionário da 2ª fase (4 horas aulas), dos dias 20 de agosto ao dia 05 de setembro, aplicação da sequência didática (3ª fase - 6 horas aulas); e por fim, do 05 ao dia 10 de setembro, aplicação do questionário da 4ª fase (4 horas aulas). Na fgura 5, mostra os alunos resolvendo o questionário da 4ª fase.

Figura 5: Alunos da EJA resolvendo problemas da 4ª Fase da engenharia didática

Fonte: Própria do Autor (2022)

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo foram colocados os resultados de cada fase da engenhara didática, bem como a discussão dos mesmos.

4.1 Análise Preliminar

Na referida escola começou-se a oferta da EJA Médio no ano de 2020 no período noturno, que antes era apenas de ensino fundamental 2, como se sabe, essa modalidade é composta por duas Etapas: 1ª Etapa, que corresponde a 1ª série do ensino médio; e a 2ª Etapa que corresponde as 2ª e 3ª séries do ensino médio, esta última a nossa etapa de estudo.

Nesta fase foi feito um questionário oral para os alunos sobre os conteúdos progressões aritméticas e geométricas, com o objetivo de saber se os mesmos já tinham estudado algo sobre tais sequências, pois sabe-se que para aplicar algo sobre recorrência o educando tem que ter um conhecimento mínimo sobre os conteúdos citados, a maioria respondeu que não estudaram e os que estudaram disseram que fazia muito tempo que estavam fora da escola. Com esses relatos foi necessário fazer uma revisão sobre PA e PG que está anexado no apêndice.

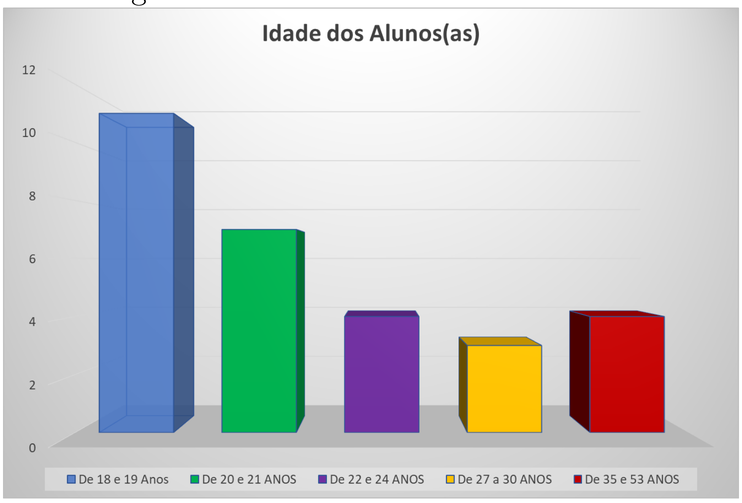
No questionário, além de perguntas sobre os conteúdos, foram feitas outras que nos fizessem refletir e levantar hipóteses sobre tal modalidade de ensino, tais como:

- *"01 - Qual a sua idade?";*
- *"02 - Qual o sexo?";*
- *"03 - Há quanto tempo sem estudar?";*
- *"04 - Você gosta de matemática?";*

- *“05 - Você está empregado?”;*
- *“06 - Tem filhos?”;*
- *“07 - Você já tinha estudado PA e PG?”;*
- *“08 - Como chegou na EJA Médio?”;*
- *“09 - O que você mais gosta da matemática?”;*
- *“10 - Você consegue resolver* ***exercícios*** *de matemática normalmente?”;*
- *“11 - Você consegue resolver* ***problemas*** *de matemática normalmente?”.*

Com base nas perguntas listadas acima, foram feitos alguns gráficos que nos mostram os dados de algumas situações dos alunos da EJA para que possamos analisar e refletir um pouco sobre tal modalidade. Então a seguir veremos os gráficos e um breve comentário logo abaixo dos mesmos, nesta ordem.

Figura 6: Referente à idade dos alunos.



Fonte: Própria do Autor (2022)

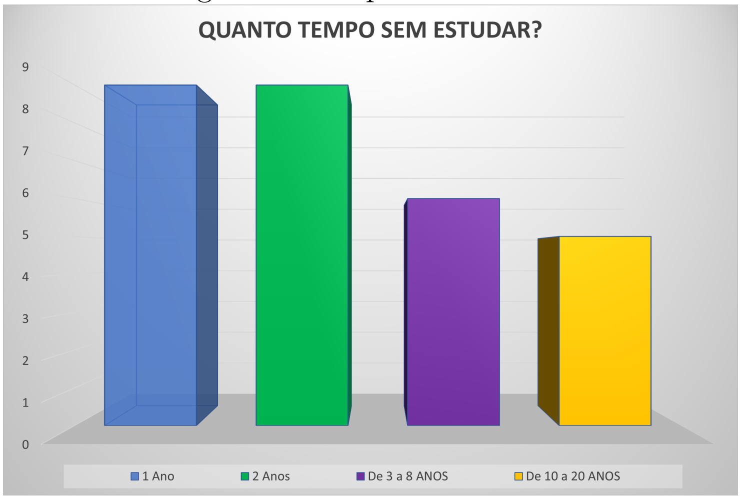
Na figura 6, foi colocado o gráfico que mostra um pouco mais da metade dos alunos estão entre os 18 e 21 anos de idade e os demais (entre 22 e 57 anos) corresponde a menos de 50% dos estudantes, isso mostra que os alunos mais jovens, em maior quantidade, estão retornando aos estudos na Educação de Jovens e Adultos, e os alunos com mais idade também estão procurando a escola com o objetivo principal que é terminar o ensino médio.

Figura 7: Referente ao sexo dos alunos.

Fonte: Própria do Autor (2022)

Na figura 7, mostra que um pouco mais da metade dos alunos da EJA são do sexo feminino, e para o pesquisador isso não é surpresa, pois em anos anteriores, pesquisas feitas pelo mesmo, mostram que na maioria das turmas as mulheres estão em maior número, e ainda mais, embora comecem com um mesmo número são elas que concluem numa quantidade maior.

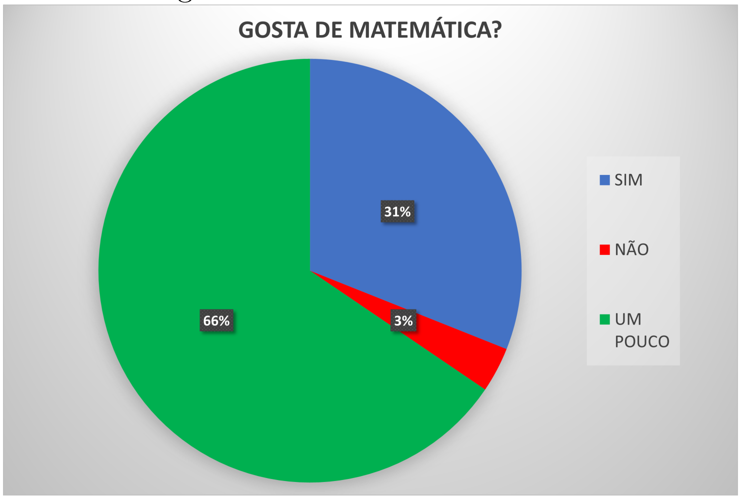
Figura 8: Tempo sem estudar



Fonte: Própria do Autor (2022)

Na figura 8, percebemos que o pouco tempo sem estudar para alunos jovens está diretamente ligado com sua idade, ou seja, aqueles alunos mais jovens são os que estão com pouco tempo sem estudar por isso são mais de 50%, enquanto que os alunos com mais tempo fora da sala de aula, corresponde exatamente aos alunos mais velhos.

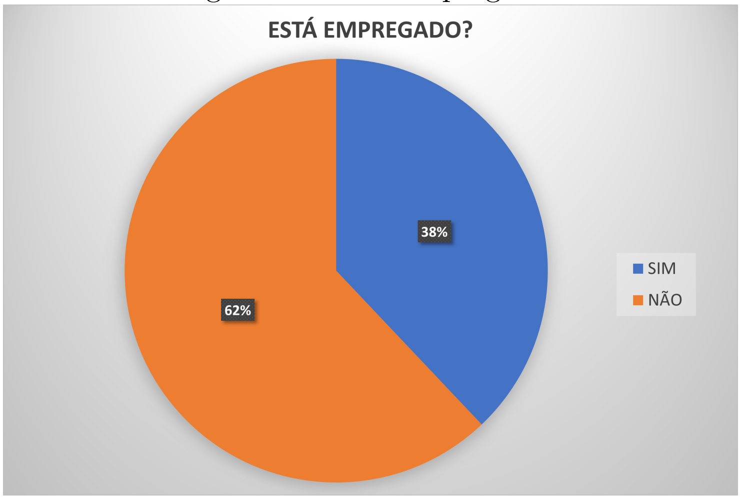
Figura 9: Gosta de matemática?



Fonte: Própria do Autor (2022)

Na figura 9, percebe-se que os alunos da EJA gostam de matemática em relação aos que responderam que não gostam, e os que "gostam um pouco" foram mais de 60%, isto nos faz refletir e pensar que esse aluno não despreza o estudo da matemática, e sim, só não conseguiu acompanhar todo o ensino fundamental e até o médio na idade regular e quando volta aos estudos, a falta de pré-requisitos atrapalha muito a própria vontade de aprender matemática. Mas com a metodologia correta podemos ajudar muitos alunos desta modalidade a gostar e aprender matemática.

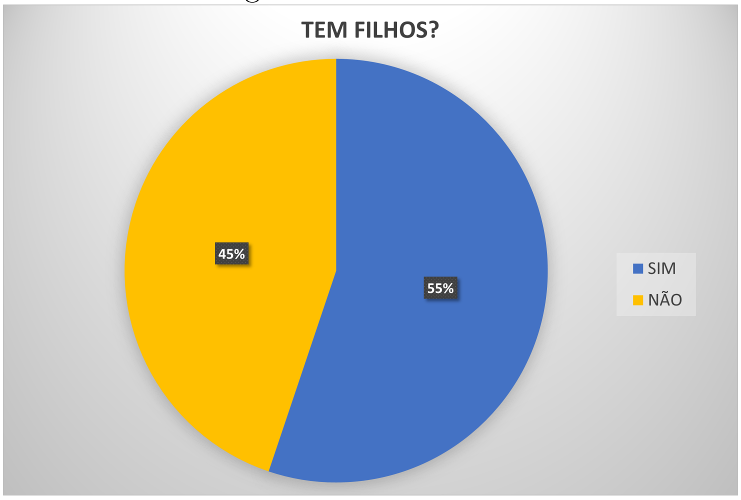
Figura 10: Está empregado?



Fonte: Própria do Autor (2022)

Na figura 10, foi feita tal pergunta com o objetivo de perceber se quando o aluno tem trabalho ou não, isso influencia ou não na desistência dele nos estudos, e percebe-se que quando um aluno da EJA está desempregado ele aproveita o tempo livre para estudar, enquanto que quando o mesmo está trabalhando ele não consegue finalizar os estudos e acaba abandonando; e ainda, aquele que estava desempregado quando consegue um emprego no decorrer dos estudos ele também acaba abandonando a escola.

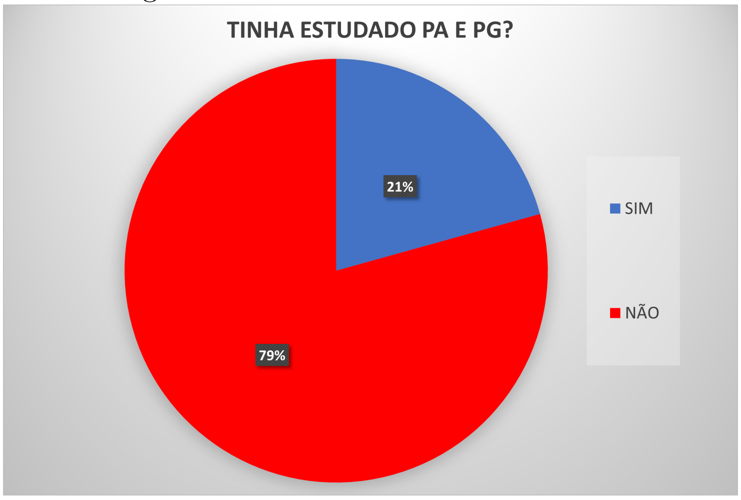
Figura 11: Tem filhos?



Fonte: Própria do Autor (2022)

Na figura 11, procurou-se saber o percentual de alunos que têm filhos na EJA, e já se esperava que mais de 50% dos alunos respondessem que “sim”, pois esse é um dos principais motivos que levam alunos do ensino regular para a EJA e um dos principais motivos para que quando esse aluno volte a estudar na modalidade, também acabe abandonando, pois são várias as dificuldades de estudar quando se tem filho pequeno.

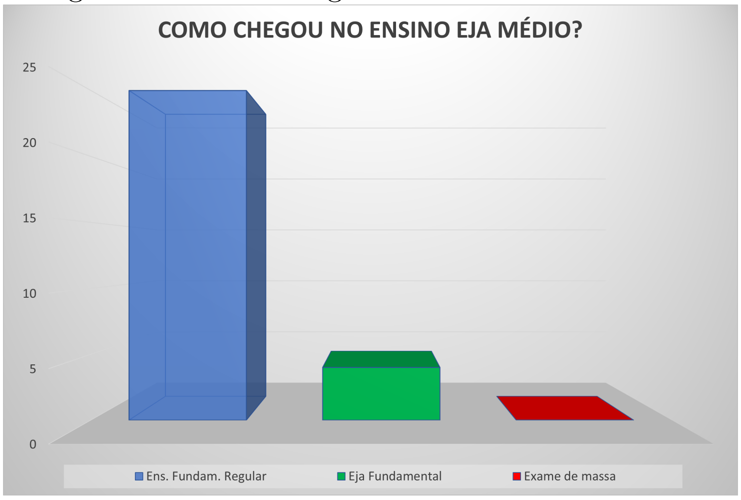
Figura 12: Tinha estudado PA e PG?



Fonte: Própria do Autor (2022)

Na figura 12, foi feita a pergunta mais importante dessa 1ª Etapa da engenharia didática, que é exatamente saber se os alunos já estudaram progressões aritméticas e geométricas, assuntos estes que são pré-requisitos para aplicar as ideias e o conceito de recorrência de primeira ordem, além de aplicar também a Resolução de Problemas como metodologia de ensino na sala de aula. Como apenas 21% dos alunos que viram o assunto comigo de forma remota no de 2021 e não assimilaram muito o assunto, junto com os alunos novos, que corresponde à 79% que não viram o assunto em anos anteriores, então foi necessário fazer uma revisão sobre PA e PG ainda no decorrer desta primeira etapa.

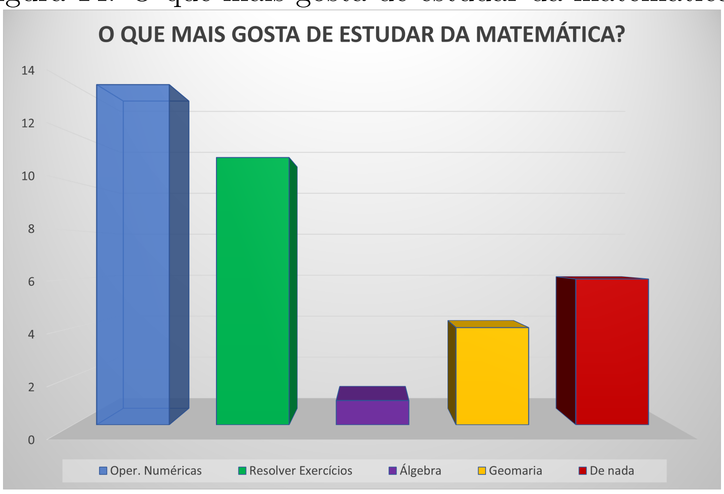
Figura 13: Como chegou no Ensino EJA Médio?



Fonte: Própria do Autor (2022)

Na figura 13, foi investigado de que modalidade de ensino os alunos da EJA vieram, cujo objetivo era saber se tiveram pelo menos um ensino fundamental regular, isto é, com um ensino da matemática regular no ensino fundamental; neste caso, tivemos quase 100% dos alunos que tiveram tal ensino, mas quando o professor pergunta se estudaram tal conteúdo, que deveriam no mínimo ter visto de forma resumida, a maioria relata que não viu e isso remete sempre à uma revisão, levando o educador a utilizar o pouco tempo que lhe é dado na carga horária da EJA.

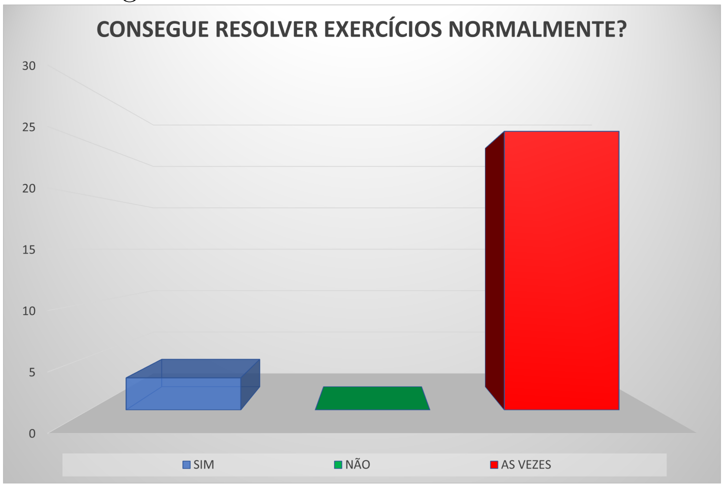
Figura 14: O que mais gosta de estudar da matemática?



Fonte: Própria do Autor (2022)

Nesta figura 14, o objetivo foi investigar do que os alunos mais gostam de fazer da matemática; e percebe-se que eles gostam muito das operações numéricas, e em segundo lugar, de resolver exercícios. De fato, não gostam de nada que envolva letras (álgebra), pois a mente dos alunos da EJA está muito limitada na matemática numérica e nas operações fundamentais, para eles é apenas isso que importa, a generalidade das operações ou quaisquer fórmulas que surgem para eles é considerada uma coisa muito ruim e isso com certeza tende a atrapalhar a pesquisa quando for aplicada uma sequência didática. A geometria também é pouco apreciada.

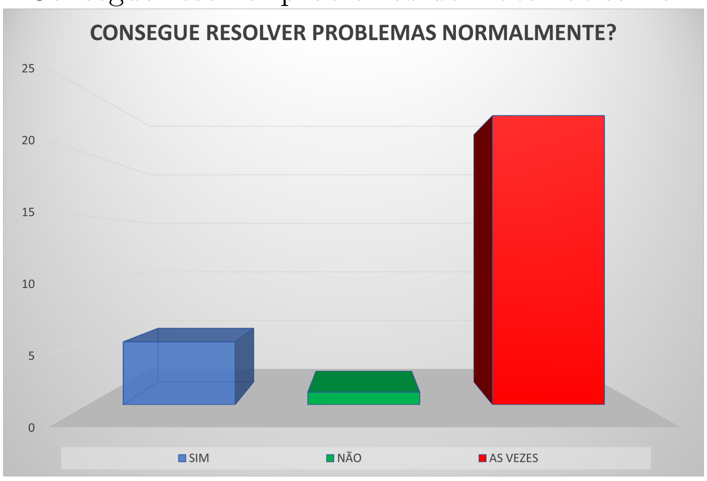
Figura 15: Consegue resolver exercícios de matemática normalmente?



Fonte: Própria do Autor (2022)

Na figura 15, foi investigado a resposta dos alunos sobre os mesmos conseguirem ou não resolver exercícios matemáticos facilmente, quase 100% responderam que as vezes conseguem, poucos responderam que sim, e quase nenhum disse que não, logo conclui-se, intuitivamente, que os alunos da EJA, embora não conseguem resolver de fato muitos exercícios, ainda sim resolvem vários do jeito que eles acham correto e que em muitos dos casos as ideias estão coerentes com o que se pede.

Figura 16: Consegue resolver problemas de matemática normalmente?



Fonte: Própria do Autor (2022)

Nesta figura 16, temos o último gráfico desta etapa, a pergunta é análoga a da figura 15, porém não é a mesma, visto que um problema matemático não é a mesma coisa que um exercício; mesmo assim, a resposta dos alunos foi parecida, pois aqui nesta etapa não foi explicado a diferença entre problema e exercício, de forma proposital, para que o próprio aluno tentasse indagar-se sobre as diferenças entre ambos, mas que é claro, seria explicado nas etapas posteriores.

Contudo, como foi falado anteriormente, ainda antes de pularmos para a próxima etapa foi necessário passar uma revisão sobre sequências numéricas, PA e PG, algumas aulas que normalmente seriam dadas em dias normais de aula e logo após essa revisão é que seria aplicado a 2ª fase da engenharia didática. Essa revisão foi dada em 20 aulas (4 aulas para sequências numéricas, 8 aulas para PA e 8 para PG). As apostilas de revisão estão anexas no apêndice deste trabalho.

4.2 Concepção e Análise a Priori

Após finalizada a revisão sobre PA e PG foi feito um questionário para os alunos contendo dois problemas sobre os referidos assuntos, respectivamente, cujo objetivo foi investigar se os mesmos conseguiam resolver problemas sobre tais conteúdos, sem ainda terem visto as aulas sobre as 4 etapas da resolução de problemas propostos por George Polya (1978). Com isso, pode-se fazer o confronto entre a 2ª e a 4ª etapa da engenharia didática e validação. Vale lembrar que o conceito de recorrência de primeira ordem foi aplicado na 3ª fase (sequência didática).

Compareceram todos os 30 alunos para esta etapa. Assim, abaixo seguem os problemas aplicados, e posteriormente a apresentação e a análise das respostas.

Figura 17: Problema 01 sobre Progressão Aritmética

PROBLEMA 01: Seu João é pedreiro e para mostrar rapidez em seu primeiro dia de trabalho, ele assentou 200 tijolos para o início da construção de um muro. O empregador de João ainda não satisfeito, propôs para ele assentar 10 tijolos à mais do que no dia anterior até completar uma semana. Se a condição fosse satisfeita, então seu João seria contratado por um período mais longo.

De acordo com o problema, pergunta-se:

a) Quantos tijolos foram assentados no 7º dia?

b) Se o empregador colocasse a condição para 30 dias, quantos tijolos seu João assentaria no 30º dia?

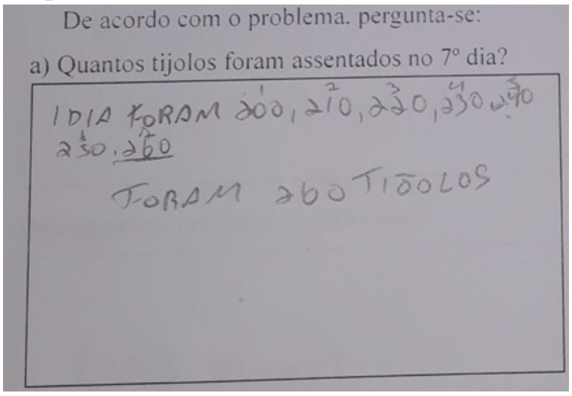
c) Quantos tijolos têm que ser assentados desde o primeiro dia, para que seu João seja contratado?

d) Sabendo que seu João consegue assentar no máximo 500 tijolos em um dia, até que dia ele conseguiria manter as condições de seu empregador, se fosse um prazo maior que uma semana?

Fonte: Própria do Autor (2022).

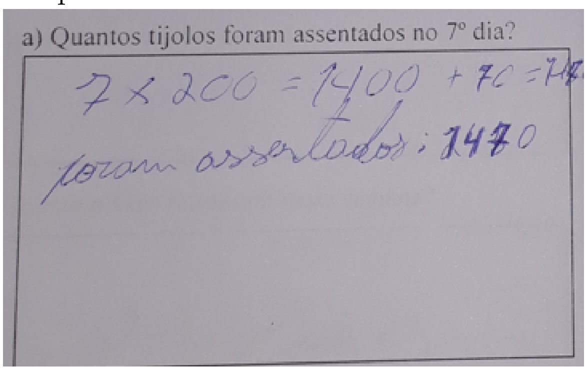
O problema 01, colocado na figura 17, investiga se: o aluno compreende o problema; consegue perceber a regularidade de uma progressão aritmética; consegue aplicar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos para resolver as perguntas do problema. Assim, foi feita a apresentação das respostas dos alunos e uma breve análise qualitativa, de maneira geral, de acertos e erros em forma percentual e com duas respostas de dois alunos, respectivamente, servindo de modelo análogo com as respostas dos demais. Logo, tem-se:

Figura 18: Resposta correta do aluno A – Problema 01 – item a)



Fonte: Própria do Autor (2022).

Figura 19: Resposta errada do aluno B – Problema 01 – item a)



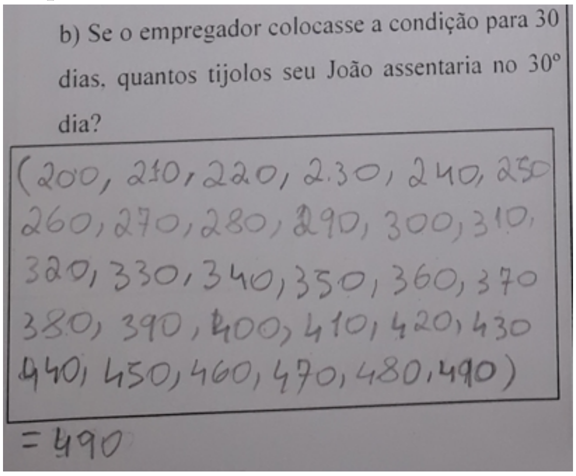
Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 18, tem-se a resposta correta do aluno A, que serve como modelo das respostas dos demais colegas que responderam de forma análoga, isto é, totalizando 17 acertos (57%); tem-se os 13 erros (43%) que é a resposta do aluno B, na figura 19, e representa as respostas erras ou em branco dos demais.

Na resposta do aluno A, mostra que os alunos conseguem resolver o problema para o item a) contando termo a termo até chegar à resposta; dos que acertaram, apenas 2 alunos conseguiram aplicar a fórmula do termo geral, os demais (15) foram contando termo a termo, mostrando que a maioria não conseguiu compreender a revisão dada sobre PA, mas ainda assim, conseguem organizar os termos de forma sequencial e chegar ao resultado correto. A resposta do aluno B, mostra que o mesmo e os demais não entenderam o problema ou a revisão, e por isso erraram ou não responderam, embora a pergunta parecia ser simples.

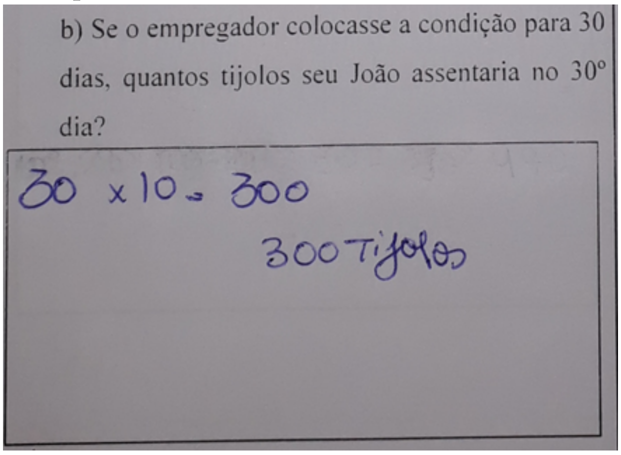
Vamos agora para as respostas do item b) corretas e erradas (ou em branco):

Figura 20: Resposta correta do aluno C – Problema 01 – item b)



Fonte: Própria do Autor (2022).

Figura 21: Resposta errada do aluno D – Problema 01 – item b)

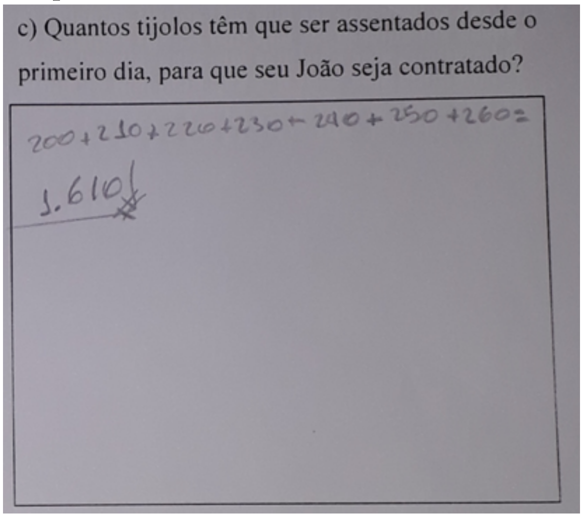


Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 20, o aluno C resolveu de forma análoga a resolução do aluno A e por isso acertou, junto com outros 2 alunos, totalizando 3 acertos (10%). Já a resposta incorreta do aluno D, da figura 21, representa 27 erros (90%) ou respostas em branco, desses, 10 responderam exatamente parecido com a resposta do aluno D, isso mostra que os alunos não entenderam o problema e por isso apenas multiplicaram a razão da PA com o número de termos, ocasionando o erro.

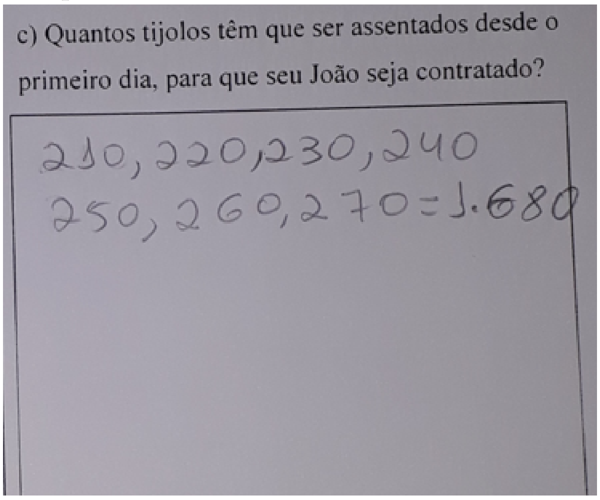
Partindo para as respostas do item c) corretas e erradas (ou em branco):

Figura 22: Resposta correta do aluno E – Problema 01 – item c)



Fonte: Própria do Autor (2022).

Figura 23: Resposta errada do aluno F – Problema 01 – item c).

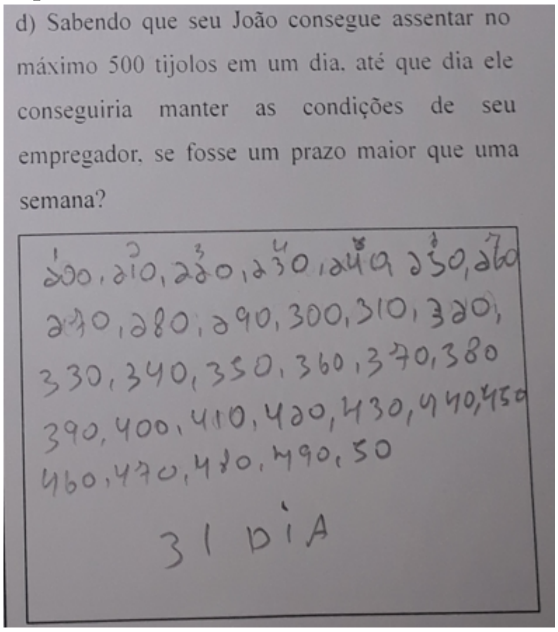


Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 22, apenas a aluna D acertou (3%), esta aluna percebeu que era para somar os termos do primeiro até o sétimo termo, chegando à resposta, mesmo que sem utilizar a fórmula dos termos da PA. Por outro lado, a resposta incorreta do aluno E, da figura 23, junto com a dos demais somam as 29 respostas erradas (97%), isso mostrou que os alunos não entenderam que a pergunta se referia a soma dos termos da PA, por isso, teríamos que trabalhar bastante sobre isso na sequência didática, pois percebe-se que em muitos casos os alunos não conseguiram interpretar se o problema era sobre encontrar *apenas um termo particular* ou se era a *soma de todos os termos da sequência*.

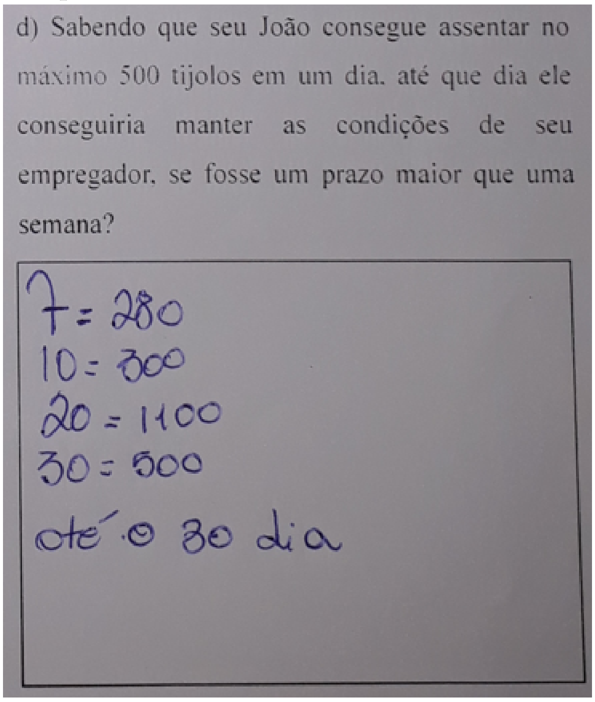
Agora vamos às respostas do item d) corretas e erradas (ou em branco):

Figura 24: Resposta correta do aluno A – Problema 01 – item d).



Fonte: Própria do Autor (2022).

Figura 25: Resposta errada do aluno G – Problema 01 – item d)



Fonte: Própria do Autor (2022).

Na resposta dada na figura 24, esse aluno e os demais, que responderam de forma análoga a este, somam 13 acertos (43%) e novamente mostra que os alunos preferem contar termo a termo até chegar no resultado, enquanto que o aluno A e os demais da figura 25, somam 17 erros (57%) a maioria que errou fez parecido com a resposta desse aluno, e o demais deixaram em branco e colocaram outro tipo de resposta incorreta.

Agora vamos ver as repostas dadas sobre o problema 02 de progressão geométrica:

Figura 26: Problema 02 sobre Progressão Geométrica

PROBLEMA 02 - (PARAIZO 2008, p.13): Os técnicos em agropecuária Rômulo e Pe – dro estão trabalhando numa pesquisa num laboratório de piscicultura e verificaram que os peixes do aquário estão morrendo. Parece que alguma moléstia atacou os peixes. Na sema – na da pesquisa, apareceu 1 peixe morto na segunda-feira. Na terça morreram 3 peixes. Na quarta morreram 9 outros.

a) Se continuar essa progressão, no final de domingo quantos peixes terão morrido?

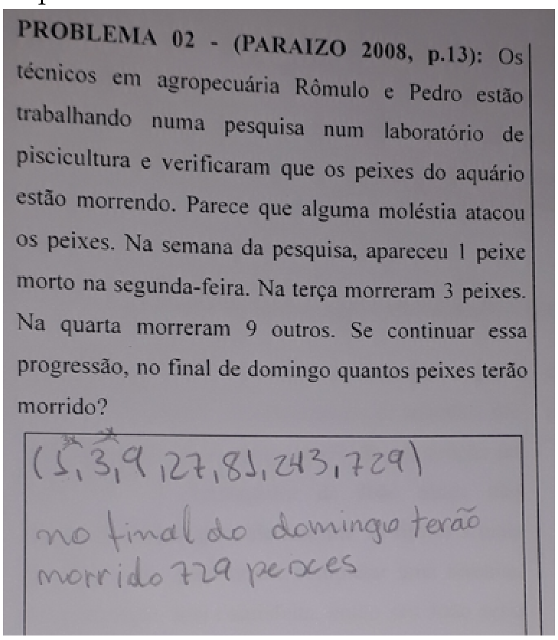
b) Quanto peixes morreram nesta semana?

Fonte: Própria do Autor (2022).

No problema 02, da figura 26, foi investigado se os alunos conseguiriam resolver o problema sobre progressão geométrica, utilizando-se da estratégia que lhes achassem mais conveniente, todavia, seria interessante que os mesmos utilizassem os conceitos de termo geral e soma dos termos de uma PG com razão maior que 1, mas não foi visto isso nas respostas, pois os alunos não conseguem aplicar as fórmulas para se chegar nas respostas de forma mais rápida, os mesmos preferem contar termo a termo até chegar ao resultado, isso não é visto como uma coisa ruim, visto que o aluno cria as suas próprias conjecturas e observações de regularidades, porém é mais trabalhoso.

Vamos às respostas dos alunos:

Figura 27: Resposta correta do aluno H – Problema 02 – item a)



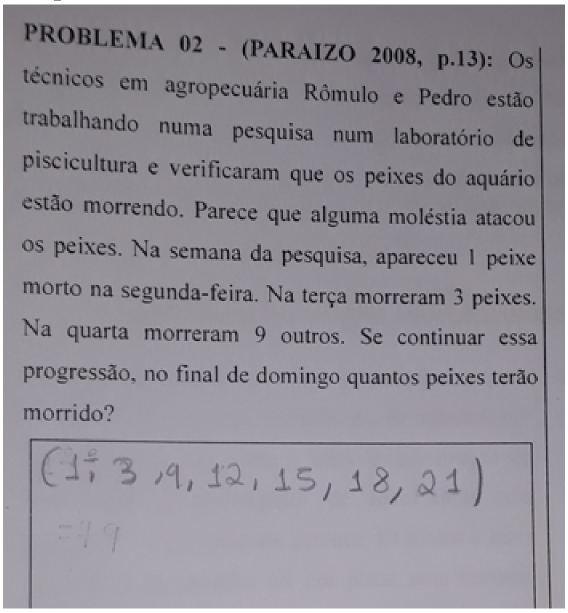
PROBLEMA 02 - (PARAIZO 2008, p.13): Os técnicos em agropecuária Rômulo e Pedro estão trabalhando numa pesquisa num laboratório de piscicultura e verificaram que os peixes do aquário estão morrendo. Parece que alguma moléstia atacou os peixes. Na semana da pesquisa, apareceu 1 peixe morto na segunda-feira. Na terça morreram 3 peixes. Na quarta morreram 9 outros. Se continuar essa progressão, no final de domingo quantos peixes terão morrido?

(1, 3, 9, 27, 81, 243, 729)

no final do domingo terão morrido 729 peixes

Fonte: Própria do Autor (2022).

Figura 28: Resposta errada do aluno I – Problema 02 – item a)


PROBLEMA 02 - (PARAIZO 2008, p.13): Os técnicos em agropecuária Rômulo e Pedro estão trabalhando numa pesquisa num laboratório de piscicultura e verificaram que os peixes do aquário estão morrendo. Parece que alguma moléstia atacou os peixes. Na semana da pesquisa, apareceu 1 peixe morto na segunda-feira. Na terça morreram 3 peixes. Na quarta morreram 9 outros. Se continuar essa progressão, no final de domingo quantos peixes terão morrido?

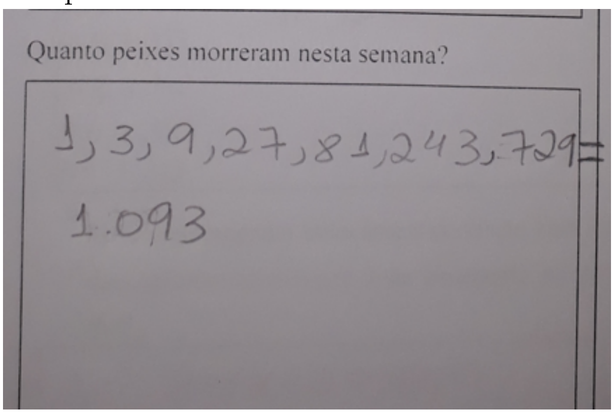
(1; 3, 9, 12, 15, 18, 21)
= 79

Fonte: Própria do Autor (2022).

A resposta correta do aluno H, na figura 27, somam com os demais 13 acertos (43%), contaram termo a termo, enquanto que a resposta do aluno I, na figura 28, somam com os demais 17 erros (57%), cujas respostas erradas foram feitas de várias foram diferentes, além de muitas em branco.

Agora vamos para a última resposta deste questionário:

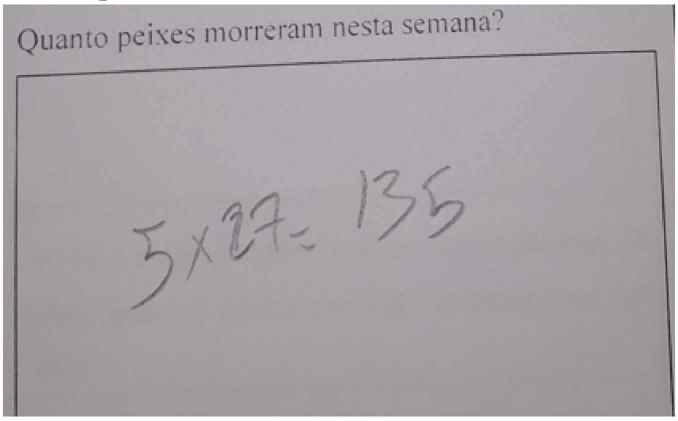
Figura 29: Resposta correta do aluno J – Problema 02 – item b).


Quanto peixes morreram nesta semana?

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 =
1.093

Fonte: Própria do Autor (2022).

Figura 30: Resposta errada do aluno L – Problema 02 – item b).



Fonte: Própria do Autor (2022).

A resposta do aluno J, na figura 29, somam com os demais 12 acertos (40%) e a resposta do aluno L, na figura 30, com os demais somam 18 erros (60%), os respectivos acertos e erros, são análogos aos respectivos acertos e erros comentados em respostas anteriores.

Portanto, conclui-se para esta etapa, que os alunos da EJA preferem resolver problemas contando termo a termo e não gostam de aplicar fórmulas para se chegar no resultado de forma menos trabalhosa, eles mesmos relataram isso em sala de aula, pois embora o professor mostrasse a facilidade de resolver os problemas aplicando os conceitos de PA e PG dadas na revisão, não foi suficiente para convencer os mesmos na resolução de problemas. Ainda assim, vale ressaltar que a revisão, mesmo antes da sequência didática foi crucial para que os educandos conseguissem resolver o questionário, inclusive neste trabalho foi considerado que a revisão foi uma introdução à sequência didática.

4.3 Sequência Didática

Nas duas fases anteriores foram analisados o perfil do aluno e o grau de conhecimento que adquiriam no decorrer da revisão de PA e PG e na aplicação do questionário sobre a resolução de problemas. Mas o que tem que ficar bem claro, é que o confronto entre a 2ª e a 4ª etapa para verificação e validação da pesquisa foi deixado apenas para resolução de problemas de PA e PG; e que, o conceito de recorrência de primeira ordem é uma experiência desta 3ª etapa da engenharia didática, em consonância com o objetivo geral deste trabalho, visto que recorrência não é um conteúdo da grade curricular desta modalidade de ensino. A sequência didática está no anexo deste trabalho.

Assim, esta fase foi desenvolvida em dois momentos, no primeiro foi aplicado os conceitos de *recorrência linear de primeira ordem* de forma mais trivial possível (3 horas aulas), com o objetivo de mostrar outra forma de generalizar as progressões aritméticas e geométricas e mostrar também o pensamento recursivo, seus tópicos foram:

- Recorrência linear de 1ª ordem homogênea;
- Resolução de uma recorrência linear homogênea;
- Recorrência linear de 1ª ordem não homogênea;
- Resolução de uma recorrência linear não homogênea.

Os alunos acharam novo e diferente o assunto, uma forma diferente de dizerem que estava difícil, ainda sim, entenderam um pouco este conceito e acharam interessante uma nova forma de se chegar no termo geral da PA e PG. Foi difícil no começo, pois os eles são pouco familiarizados com álgebra, como já vimos na etapa anterior, mas se mostrarmos casos particulares ora ou outra, eles acabam compreendendo o conteúdo.

No segundo momento foi aplicado o conceito de Resolução de Problemas seguidas de suas 4 etapas (3 horas aulas), propostas por George Polya (1978), que foram: compreender o problema; estabelecimento de um plano; execução do plano e retrospecto ou verificação. Logo após essas etapas foram colocados dois problemas para praticar junto com os alunos, os problemas em sua maioria, foi trabalhado a resolução de problemas e em apenas duas questões falava de recorrência.

Portanto, para esta etapa, o estudo das recorrências com alunos da EJA ainda tem muito a se construir em termos de pesquisas e trabalhos que ajudem no desenvolvimento de conteúdos e problemas relacionados, a pesquisa só não foi um fracasso pelo fato do pesquisador aplicar revisões sobre as progressões e mostrar passo a passo de como o pensamento recursivo se desenvolve em uma dada sequência. Por outro lado, o estudo da Resolução de Problemas pode e deve ser utilizado pelo professor como uma ferramenta metodológica, pois além de deixar a aula mais significativa, faz com que os alunos se interessem mais pelo conteúdo e pela matemática. Assim, vamos para a quarta e última etapa deste trabalho.

4.4 Análise a Posteriori

Nesta etapa foi feito um questionário com três problemas sobre PA (problemas 01 e 02) e PG (problema 03), logo após a sequência didática, com o objetivo de confrontar com as respostas da 2ª etapa, pois assim veremos se surtiu efeito tal sequência de ensino. Assim, após a apresentação dos resultados foi feita uma conclusão geral das duas etapas, para verificar se houve êxito no resultado final. Apenas 20 alunos participaram desta última etapa dos 30 que participaram da 2ª etapa, pois uma parte havia faltado e a outra desistido dos estudos, uma realidade dessa modalidade de ensino.

Para que a análise seja mais prática, colocaremos as figuras apenas das respostas corretas, com número de acertos e porcentagens. Por outro lado, nas respostas erradas não serão mostradas as imagens, apenas o número de erros e porcentagens, assim teremos os números para as devidas conclusões no final.

A figura abaixo é do problema 01 sobre PA e mais abaixo as imagens das respostas corretas com a apresentação dos acertos e erros em números discretos e porcentagens e o mesmo foi feito com as respostas erradas, porém sem as figuras destas. E deste mesmo modo, será apresentado para os problemas 02 e 03.

Figura 31: Problema 01 aplicado sobre PA.

PROBLEMA 01 - (MILANI, 2011 - Adaptado): Você decide economizar dinheiro da seguinte forma: no primeiro mês, guarda R$20,00. Nos meses seguintes, guarda sempre R$10,00 a mais que no mês anterior.

a) Qual o termo geral da sequência?

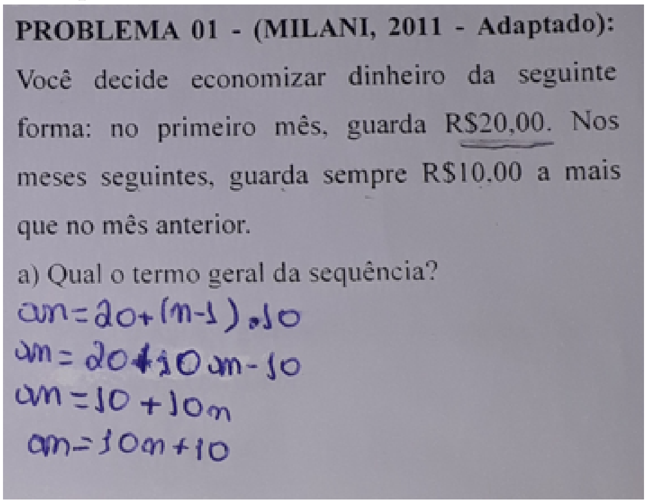
b) Supondo que a economia começou no mês de Janeiro, então quanto foi guardado no mês de Dezembro?

c) Qual foi o total economizado em 12 meses?

Fonte: Própria do Autor (2022).

No problema 01, da figura 27, e nos demais problemas, foi investigado se os alunos conseguiram aplicar as quatro fases da resolução de problemas. Assim, vamos as respostas:

Figura 32: Resposta correta do aluno A – Problema 01 – item a).


PROBLEMA 01 - (MILANI, 2011 - Adaptado): Você decide economizar dinheiro da seguinte forma: no primeiro mês, guarda R$20,00. Nos meses seguintes, guarda sempre R$10.00 a mais que no mês anterior.

a) Qual o termo geral da sequência?

$a_n = 20 + (n-1) \cdot 10$

$a_n = 20 + 10n - 10$

$a_n = 10 + 10n$

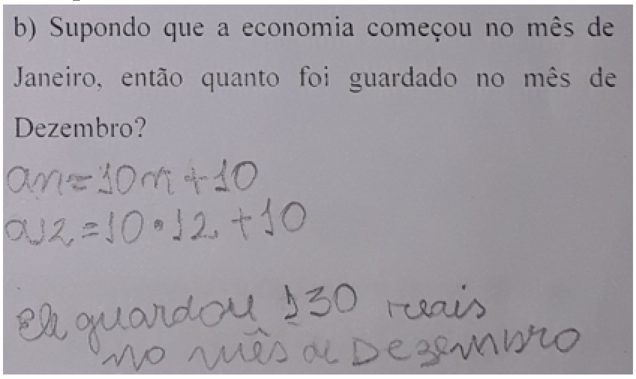
$a_n = 10n + 10$

Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 32, mostra que o aluno A acertou junto com outros 15 alunos (80% de acertos), que responderam de modo análogo, isso mostra que muito mais da metade dos alunos compreenderam a notação do termo geral e responderam conforme o que foi pedido, contra 20% dos que erraram.

Agora vamos ver os dados do item b) do problema 01:

Figura 33: Resposta correta do aluno B – Problema 01 – item b).



b) Supondo que a economia começou no mês de Janeiro, então quanto foi guardado no mês de Dezembro?

$a_n = 10n + 10$

$a_{12} = 10 \cdot 12 + 10$

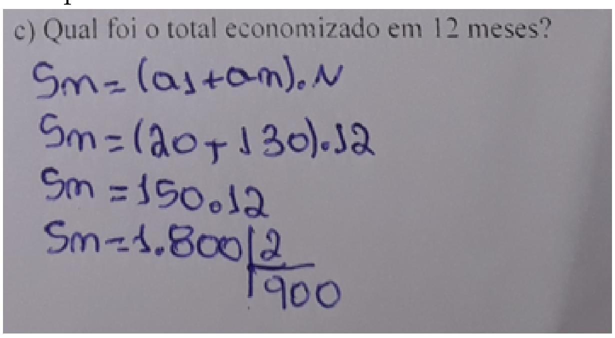
Ele guardou 130 reais no mês de Dezembro

Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 33, o aluno C acertou com mais 14 alunos (70%) de forma que todos conseguiram aplicar o valor específico para encontrar o termo específico e resolver o problema, enquanto que 30% dos alunos não conseguiram responder.

A imagem abaixo mostra a resposta do aluno C, que respondeu corretamente o item c) do problema 01.

Figura 34: Resposta correta do aluno C – Problema 01 – item c).



c) Qual foi o total economizado em 12 meses?

$S_n = (a_1 + a_n) . n$

$S_n = (20 + 130) . 12$

$S_n = 150 . 12$

$S_n = 1.800 | 2$

900

Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 34, o aluno C acertou com mais 6 colegas (35%), nesta questão nem todos os alunos lembraram da fórmula da soma dos termos, e por isso, a maioria não conseguiu resolver o problema, pois foi pedido em sala que utilizassem a fórmula da soma, se fosse pedido para resolverem de forma livre, com certeza teríamos mais acertos, cuja resposta seria somando termo a termo, mais ainda sim, este resultado foi considerado pelo pesquisador muito bom, visto que boa parte dos educandos conseguiram aplicar a fórmula na resolução de um problema. Os outros que erraram foram 13 alunos (65%), deixaram em branco, a maioria, e outros responderam de forma errada.

Portanto, para essa questão de PA, houve uma melhora muito significativa na resolução de problemas, em relação à resolução do problema da 2ª etapa, pois os alunos compreenderam com mais facilidade o problema e souberam aplicar as fórmulas para a resolução.

Agora vamos para o problema 02 também sobre PA.

Figura 35: Problema 02 sobre PA.

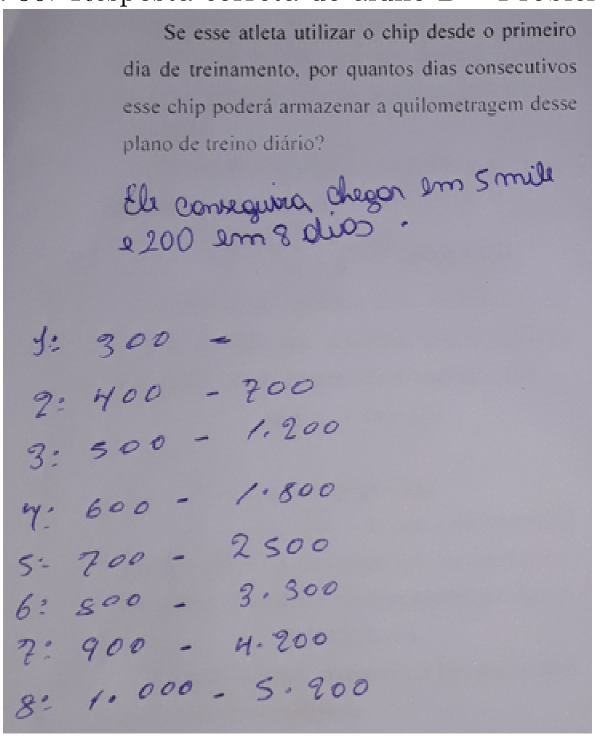
PROBLEMA 02 - (Enem PPL 2013 - Adaptado): Para um principiante em corrida, foi estipulado o seguinte plano de treinamento diário: correr 300 metros no primeiro dia e au – mentar 100 metros por dia, a partir do segundo. Para contabilizar seu rendimento, ele utili – zará um chip, preso ao seu tênis, para medir a distância percorrida nos treinos. Considere esse chip armazene, em sua memória, no máximo 5 km de corrida/caminhada, devendo ser colocado no momento do início do treino e descartado após esgotar o espaço para reserva de dados.

Se esse atleta utilizar o chip desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias con- Secutivos esse chip poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário?

Fonte: Própria do Autor (2022).

Vamos as respostas dos alunos, termos a resposta correta do aluno D na figura 33.

Figura 36: Resposta correta do aluno D – Problema 02.


Se esse atleta utilizar o chip desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias consecutivos esse chip poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário?

Ele conseguiria chegar em 5 mile e 200 em 8 dias.

1: 300 -
2: 400 - 700
3: 500 - 1.200
4: 600 - 1.800
5: 700 - 2500
6: 800 - 3.300
7: 900 - 4.200
8: 1.000 - 5.200

Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 36, aluno D e mais 13 acertaram (70%), para essa questão foi deixado livre a resolução, ou seja, como o pesquisador não restringiu o modo de resolução, então os alunos chegaram na resposta correta. Os alunos que erraram (30%), não entenderam e muitos deixaram em branco.

Vamos ao problema 03 e último sobre PG.

Figura 37: Problema 03 sobre PG.

PROBLEMA 03 - (MILANI, 2011 - Adaptado): Certa epidemia causada por um vírus atingiu uma cidade. No primeiro dia foram registrados 60 casos; no segundo dia, 180 novos casos; no terceiro 540, e nos dias subsequentes o número de novos casos se manteve na mes – ma progressão.

a) Em que dia a estimativa atingiria 14 580 novos casos?

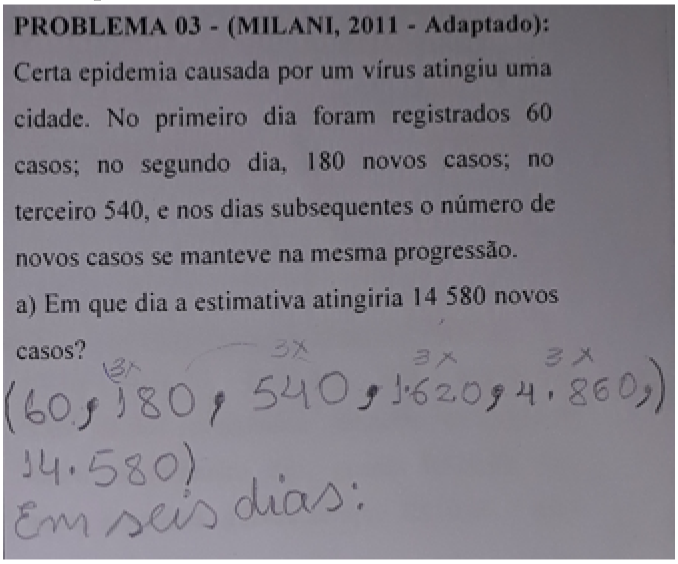
b) Qual fórmula generaliza o problema, em relação ao contágio diário?

c) Quantos pessoas foram infectadas em 10 dias?

Fonte: Própria do Autor (2022).

Partindo para as respostas, vamos analisar o item a):

Figura 38: Resposta correta do aluno E – Problema 03 – Item a).



PROBLEMA 03 - (MILANI, 2011 - Adaptado):
Certa epidemia causada por um vírus atingiu uma cidade. No primeiro dia foram registrados 60 casos; no segundo dia, 180 novos casos; no terceiro 540, e nos dias subsequentes o número de novos casos se manteve na mesma progressão.
a) Em que dia a estimativa atingiria 14 580 novos casos?

3x 3x 3x 3x

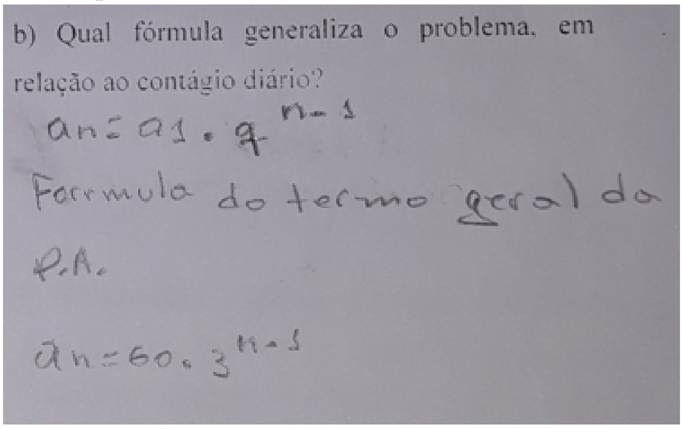
(60, 180, 540, 1.620, 4.860,)
14.580)
Em seis dias:

Fonte: Própria do Autor (2022).

A resposta do aluno E, na figura 38, que representa os alunos com a resposta correta, somam 18 acertos (90%), isto é, quase todos responderam de forma correta, e penas 2 alunos erraram, isso mostra que de fato os alunos compreenderam essa parte do conteúdo e que as fases da resolução de problemas surtiram efeito.

Abaixo temos a resposta do item b) do problema 03.

Figura 39: Resposta correta do aluno F – Problema 03 – Item b).



b) Qual fórmula generaliza o problema, em relação ao contágio diário?

$an = a1 \cdot q^{n-1}$

Formula do termo geral da P.A.

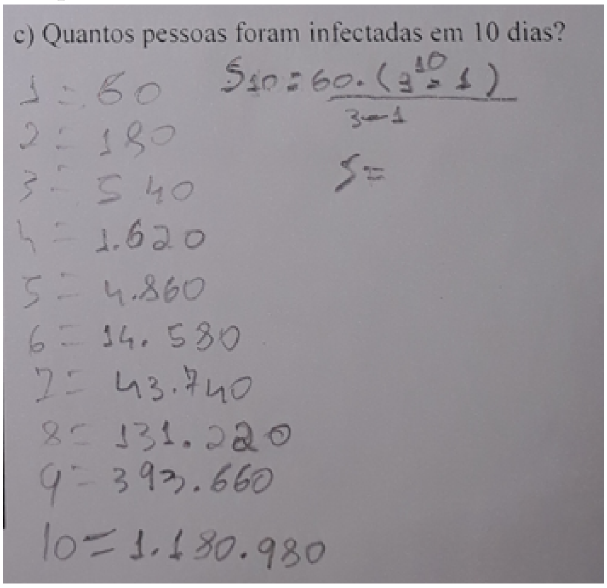
$an = 60 \cdot 3^{n-1}$

Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 39, temos a resposta correta do aluno F com os demais somando 7 certos (35%), isso mostra que a maioria não compreendeu o problema, pois se comprova pelo relato dos alunos e pela maioria deixarem a questão em branco, 8 dos 13.

Por fim, vamos aos dados da nossa última figura, item c).

Figura 40: Resposta correta do aluno G – Problema 03 – Item c).



c) Quantos pessoas foram infectadas em 10 dias?

1 = 60
2 = 180
3 = 540
4 = 1.620
5 = 4.860
6 = 14.580
7 = 43.740
8 = 131.220
9 = 393.660
10 = 1.180.980

$S_{10} = \frac{60 \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1}$

$S =$

Fonte: Própria do Autor (2022).

Na figura 40, o aluno G e os demais que acertaram somam 10 (50%), pois, embora o pesquisar elaborou um item do problema considerado exagerado no que se pedia, ainda assim, a metade dos alunos conseguiram desenvolver e resolver o problema, e isto mostrou que os alunos já estavam se familiarizado com a resolução de problemas e com o conteúdo PA e PG.

Portanto, para uma análise mais geral sobre as duas etapas da engenharia didática (2ª e 4ª etapas), percebe-se que houve uma evolução significativa na resolução de problemas depois de aplicada a engenharia didática (3ª etapa), visto que os alunos perguntavam menos na resolução dos problemas, e também no percentual das respostas corretas das questões da 4ª etapa, que foram bem maiores que o percentual de acertos das repostas da 2ª etapa. Isso mostrou que os professores de matemática podem e devem procurar outras vertentes metodológicas de ensino para fazer com que suas aulas se tornem mais significativas e prazerosas para os seus alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A recorrência linear de primeira ordem é um conteúdo de graduação e pós graduação, mas o pesquisador partiu para um novo desafio e resolveu aplicar esse conceito para alunos da EJA Médio, para verificar se esse conceito é viável em tal modalidade, contudo o trabalho não ficou focado apenas nisso, foi também trabalhado a resolução de problemas de PA e PG, cujos resultados foram muitos significativos, visto que houve a evolução dos alunos na resolução de problemas, já sobre recorrência observou-se uma pequena resistência dos alunos sobre o tema, pois os mesmos não gostam muito da matemática algébrica, ou seja, daquela proveniente de fórmulas e conjecturas específicas que se constroem para se chegar nelas, mas segundo o relato de alguns alunos, eles acharam interessante o modo de como existe um conteúdo mais amplo que generaliza as progressões, e com isso eles perceberam que têm que aprender mais e tentar, quem sabe no futuro, procurar explicações em contextos de conteúdos superiores.

Nesse sentido, esses resultados poderiam ser melhores se houvessem mais estudos e trabalhos matemáticos voltados para a educação de jovens e adultos, visto que existem poucos trabalhos e produções para essa modalidade. Professores quando pesquisam trabalhos para a modalidade, não encontram muitos, têm muito mais para o ensino médio regular. Logo, fica a sugestão, que acadêmicos e pós acadêmicos em conclusão de estudo, pensem mais na educação matemática para a produção de trabalhos voltados para a modalidade EJA, que por muitos, é vista como uma clientela ruim, porém são pessoas que voltaram a estudar e precisam de conteúdos bons e de serem bem vistos e respeitados por todos.

Com isso, vale ressaltar, portanto, que quaisquer aulas produzidas para a modalidade EJA são criadas diretamente por pesquisas bibliográficas feitas pelo professor da escola, pois a modalidade não possui livros didáticos disponíveis. Por isso, toda e qualquer produção de conteúdo feita e adaptada pelo professor deve ser levada em conta. E esperamos que neste trabalho não seja diferente.

Referências

[1] ALVES, Carla. *Influências da engenharia didática francesa na educação matemática no brasil: a circulação e a apropriação de ideias*, SEMUR, (2013).

[2] ARTIGUE, Michèle. *Ingénierie didactique.* **Recherches en didactique des mathématiques**, volume 9, n. 3, p. 281-308, (1988).

[3] BATISTA, Michel Corci; FUSINATO, Polonia Altoé. A utilização da modelagem matemática como encaminhamento metodológico no ensino de física. 2015.

[4] BRASIL, Constituição; BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União,** v. 134, n. 248, p. 2783427841-2783427841, 1996.

[5] CAMILO, Aline. ALVES, Francisco Régis Vieira. FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes *A Engenharia Didática articulada à Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Geometria Espacial*, volume 16, Ed. 59, UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, (2020).

[6] CARDOSO, Andrea *et al.* Ensino de Geometria Espacial métrica: uma experiência com modelagem. **Sigmae,** v. 1, n. 1, p. 140-151, 2012.

[7] DE FREITAS, Suzana Cristina; MOLINA, Adão Aparecido. *Estado, políticas públicas educacionais e formação de professores: em discussão a nova resolução CNE/CP n. 2, de 20 de dezembro de 2019.* **Pedagogia em Foco**, volume 15, n. 13, p. 62-81, 2020.

[8] DE MATOS FILHO, Maurício A. Saraiva. ENGENHARIA DIDÁTICA **Revista Eletrônica da Estácio Recife,** v. 1, n. 1, 2015.

[9] DI PIERRO, Maria Clara; JOIA, Orlando; RIBEIRO, VERA. *Visões da educação de jovens e adultos no Brasil.* **Cadernos Cedes**, v. 21, p. 58-77, 2001.

[10] FREIRE, Paulo. Educação como prática da liberdade. 14ª edição. **Rio de janeiro: Paz e Terra,** 1983.

[11] GADOTTI, M. Educação e Ordem Clasissta–Prefácio [w:] P. Freire. **Educação e mudança,** 1979.

[12] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar P. WAGNER, Eduardo. MORGADO, AC. *A matemática do ensino médio*, Volume 2, SBM, Rio de Janeiro, (2016).

[13] ONUCHIC, Lourdes de la Rosa et al. *Resolução de Problemas*, ed. 2, **Paco e Littera**, (2016).

[14] PAIS, Luiz Carlos. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa. 2. reimp*, Autêntica, Belo Horizonte, (2008).

[15] PEREIRA, Marcus Vinícius. Recorrências-problemas e aplicações. 2014.

[16] RODRIGUES, Adriano; MAGALHÃES, Shirlei Cristina. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA: diagnosticando a prática pedagógica.

[17] SCORTEGAGNA, Paola Andressa; DA SILVA OLIVEIRA, Rita de Cássia. Educação de Jovens e Adultos no Brasil: uma análise histórico-crítica. **Revista Eletrônica de Ciências da Educação,** v. 5, n. 2, 2006.

[18] SILVA FILHO, Valdemiro Carlos dos Santos. Uma abordagem do estudo de sequências e séries numéricas na matemática do ensino médio. 2020.

[19] SOUSA, Helliton Maia. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática.** 2015. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Oeste do Pará.

APÊNDICE A: QUESTIONÁRIO DA FASE 01.

Universidade Federal do Amapá – UNIFAP

Departamento de Pós-Graduação

Mestrado Profissional e Matemática

Engenharia Didática – 1ª Fase: Análise Preliminar.
Local de Aplicação: E. E. PROF.º RUTH DE ALMEIDA BEZERRA

Professor: Paulo Afonso Pantoja Borges

QUESTIONÁRIO PARA O/A ALUNO(A)

01) - Qual a sua idade?

_______ anos.

02) – Qual o sexo?

- Masculino ☐
- Feminino ☐
- Outro ☐

03) – Há quanto tempo sem estudar?

_______anos.

04) – Você gosta de matemática?

☐ Sim ☐ Não ☐ Um pouco

05) – Você está empregado?

☐ Sim ☐ Não

06) – Tem filhos?

☐ Sim ☐ Não

07) – Você já tinha estudado PA e PG?

☐ Sim ☐ Não

8) – Como chegou na EJA Médio?

- Ensino Fundamental ☐
- Exame de massa ☐
- Eja Fundamental ☐

09) – O que você mais gosta da matemáticas? Marque mais de uma altenativa.

- Das operações numéricas ☐
- De resolver exercícios ☐
- De contas com letras ☐
- De geometria ☐
- De nada ☐

10) – Você consegue resolver exercícios de matemática normalmente?

☐ Sim ☐ Não ☐ as vezes

11) – Você consegue resolver Problemas de matemática normalmente?

☐ Sim ☐ Não ☐ as vezes

APÊNDICE B: QUESTIONÁRIO DA FASE 02.

Universidade Federal do Amapá – UNIFAP

Departamento de Pós-Graduação

Mestrado Profissional e Matemática

Engenharia Didática – 2ª Fase: Concepção e Analise a Priori
Local de Aplicação: E. E. PROF.º RUTH DE ALMEIDA BEZERRA

Professor: Paulo Afonso Pantoja Borges

Aluno (a): ________________________________

QUESTIONÁRIO SOBRE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

PROBLEMA 01: Seu João é pedreiro e para mostrar rapidez em seu primeiro dia de trabalho, ele assentou 200 tijolos para o início da construção de um muro. O empregador de João ainda não satisfeito, propôs para ele assentar 10 tijolos à mais do que no dia anterior até completar uma semana. Se a condição fosse satisfeita, então seu João seria contratado por um período mais longo.

De acordo com o problema, pergunta-se:

a) Quantos tijolos foram assentados no 7º dia?

b) Se o empregador colocasse a condição para 30 dias, quantos tijolos seu João assentaria no 30º dia?

c) Quantos tijolos têm que ser assentados desde o primeiro dia, para que seu João seja contratado?

d) Sabendo que seu João consegue assentar no máximo 500 tijolos em um dia, até que dia ele conseguiria manter as condições de seu empregador, se fosse um prazo maior que uma semana?

APÊNDICE B: QUESTIONÁRIO DA FASE 02.

PROBLEMA 02 - (PARAIZO 2008, p.13): Os técnicos em agropecuária Rômulo e Pedro estão trabalhando numa pesquisa num laboratório de piscicultura e verificaram que os peixes do aquário estão morrendo. Parece que alguma moléstia atacou os peixes. Na semana da pesquisa, apareceu 1 peixe morto na segunda-feira. Na terça morreram 3 peixes. Na quarta morreram 9 outros. Se continuar essa progressão, no final de domingo quantos peixes terão morrido?

Quanto peixes morreram nesta semana?

APÊNDICE C: REVISÃO DE PA - FASE 3

Universidade Federal do Amapá – UNIFAP

Departamento de Pós-Graduação

Mestrado Profissional e Matemática

Engenharia Didática - Sequência Didática (Revisão de PA e PG)

Local de Aplicação: E. E. PROF.º RUTH DE ALMEIDA BEZERRA

Professor: Paulo Afonso Pantoja Borges

Aluno (a): ________________________________

SEQUÊNCIAS: PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA) E GEOMÉTRICAS (PG)

<u>SEQUÊNCIAS</u>

Sequências ou Sequências numéricas

São conjuntos em que os elementos se sucedem, obedecendo a uma determinada ordem.

Exemplos:

a) (0, 2, 4, 6, 8, 10,...) é a sequência dos números pares.

b) (1, 3, 5, 7, 9, 11,...) é a sequência dos números ímpares.

c) (0, 5, 10, 15, 20, 25,...) é a sequência dos múltiplos de 5.

<u>Resolução de Exercício 01</u>

Questão 01 - Vamos montar algumas sequências. Os termos das sequências serão obtidos por uma adição, subtração, multiplicação ou divisão do número dado.

Sequência 1 $\boxed{+5}$

(3, ___, ___, ___, ___, ___, ____, ____, ____, ____)

Sequência 2 $\boxed{-3}$

(7, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

Sequência 3 $\boxed{x\ 2}$

(2, ___, ___, ___, ___, ___, ____, ____, ____, ____)

Sequência 4 $\boxed{:2}$

(120, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___)

Questão 02 - Observe as sequências e complete-as:

Sequência 1: (6, 11, 16, 21, 26, 31, ___)

Sequência 2: (1, 4, 9, 16, 25, 36, ___)

Sequência 3: (1, -2, 4, -8, 16, -32, ___)

Sequência 4: (5, 7, 9, 11, 13, ___)

Sequência 5: (12, 8, 4, ___)

Sequência 6: (-35, -30, -25, ___)

Sequência 7: (16, 8, 4, ___)

Sequências Finitas

Uma sequência finita é uma sucessão numérica na qual os seus elementos tem fim, isto é, possui um último elemento. Notamos como: $(a_1, a_2, a_3, \ \dots, a_n)$, onde a_1 é o primeiro elemento da sequência, a_2 é o segundo elemento da sequência, a_3 é o terceiro elemento da sequência etc.

Sequências Infinitas

Uma sequência infinita é uma sucessão numérica na qual os seus elementos não tem fim, isto é, não possui um último elemento. Notamos como: $(a_1, a_2, a_3, \ \dots, a_n, \dots)$.

APÊNDICE C: REVISÃO DE PA - FASE 3

Atividade 01

Questão 01 - Abaixo serão apresentadas várias sucessões numéricas obedecendo a certa lógica quantitativa.

Observe a sucessão e tente descobrir a lei que norteia a sua construção para assim escrever o próximo elemento da sucessão:

a) 1, 3, 5, 7, ___.

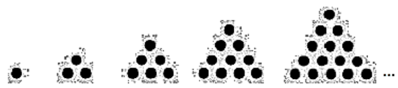
b) 2, 7, 12, 17, 22, 27, ____.

c) 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ____

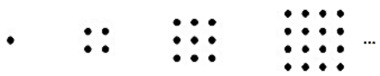
d) 0, 4, 16, 36, 64, ____

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ____

Questão 02 - Observe as figuras abaixo e desenhe a próxima figura da sequência. Depois, escreva a sequência numérica formada pelas figuras.

a) 

___ ___ ___ ___ ___ ___

b) 

___ ___ ___ ___ ___

c) 

___ ___ ___ ___ ___

<u>Progressão Aritmética (P.A)</u>

São comuns na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais. Vejamos algumas situações concretas.

Exemplos 01:

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumentou mensalmente sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho?

Solução: Os valores da produção mensal, a partir de janeiro, são 400, 430, 460, 490, 520, 550,... . Em junho, a fábrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, racionando do modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta 5.30 = 150 veículos. Em junho, a fábrica produziu 400+150 = 550 veículos.

Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.A sequência (400; 430; 460; 490; 520; 550;...) é um exemplo de uma progressão aritmética.

O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão de progressão. A razão da progressão acima é igual a 30.

DEFINIÇÃO: Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de ***razão*** da progressão e representada pela letra ***r***.

As sequências (5, 8, 11, 14,...) e (7, 5, 3, 1,...) são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 3 e - 2.

APÊNDICE C: REVISÃO DE PA - FASE 3

Em uma progressão aritmética (a_1, a_2, a_3, ...), para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois, ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos; $a_{12} = a_7 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = a_{17} - 13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a_{17} para a_4 e, de modo geral,

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1).r;}$$

pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $\boldsymbol{n-1}$ termos.

A equação $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1).r}$ é chamada termo geral da Progressão Aritmética.

Notação:

Na Progressão Aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, temos:

$\boldsymbol{a_1}$= primeiro termo

$\boldsymbol{a_n}$ = último termo, termo geral ou enésimo termo

n = número de termos(se for uma PA finita)

r = razão

Outra forma de ver o termo geral de uma PA é a seguinte:

Aplicando a definição de PA, podemos escrevê-la de uma outra forma:

Primeiro termo $a_1 = a_1$

Segundo termo $a_2 = a_1 + r$

Terceiro termo $a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_3 = a_1 + 2r$

Quarto termo $a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) +$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

(...)

Logo nosso último termo será:

Último termo $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}$, que é o **termo geral** da PA.

Exemplo 01: Seja a PA (5, 9, 13, 17, 21, 25), temos que:

$a_1 = 5$

n = 6 , como $\boldsymbol{n}$ é igual a 6, então essa PA tem 6 termos e nesse caso o último é...

$a_n = a_6 = 25$

r = 4

Exemplo 02: Seja a PA (15, 12, 9, 6, 3, 0, -3,-6), temos que:

$a_1 = 15$

n = 8 , como $\boldsymbol{n}$ é igual a 8, então essa PA tem 8 termos e nesse caso o último é...

$a_n = a_8 = - 6$

r = -3

Observe no **Exemplo 01** que, como a razão r é positiva (r = 4), a progressão Aritmética é **crescente.** No **Exemplo 02,** a razão é negativa, logo a PA é **decrescente.** Quando a razão é zero temos uma PA constante.

Exemplo 03: Seja a PA (2,2,2,2,2,2,2) a razão é zero.

CLASSIFICAÇÃO

Uma progressão aritmética (P.A) pode ser classificada em: crescente, decrescente e constante, dependendo do valor da sua razão.

Crescente: Em uma P.A crescente a razão deve ser maior que zero (positiva), assim é perceptível que os termos a partir do segundo são maiores que os seus antecessores.

Exemplo: Seja a P.A (5, 8, 11, 14, 17) é crescente, pois sua razão é igual a r = 3, ou seja, positiva.

Decrescente: Em uma P.A decrescente a razão deve ser menor que zero (negativa), assim é perceptível que os termos a partir do segundo são menores que os seus antecessores.

Exemplo: Se invertermos a P.A crescente do exemplo anterior, ela ficaria assim:

(17, 14, 11, 8, 5).

Essa nova P.A é decrescente, pois sua razão é r = - 3, ou seja, negativa.

Constante: Em uma P.A constante a razão deve ser igual a zero, pois a característica desse tipo de P.A é que todos os termos são iguais.

APÊNDICE C: REVISÃO DE PA - FASE 3

Exemplos:

a) As progressões aritméticas (1, 1, 1, 1, 1) e (-5, -5, -5, -5) são consideradas constantes, pois suas razões são iguais a zero.

Atividade 02

Questão 01 - Determine o décimo termo da P.A. (2, 8, 14, ...).

Questão 02 - Os aprovados em um concurso público foram convocados, ao longo de um ano, para ocupar os respectivos cargos, segundo os termos de uma P.A.: Em Janeiro, foram chamadas 18 pessoas; em fevereiro 30; em março 42; e assim por diante.
(a) Quantas pessoas foram convocadas no mês de agosto?

b) Quantas pessoas foram chamadas no mês dezembro?
Solução...

Questão 04 - Durante quinze dias observou-se o crescimento do caule de uma semente germinada. No primeiro dia sua altura era de 10mm e no último, de 80mm. Qual foi o crescimento diário, sabendo-se que esse valor foi constante?

<u>Propriedades da PA.</u>

P1: **Três termos consecutivos**

Numa PA, qualquer termo, a partir do segundo, é a média aritmética do seu antecessor e do seu sucessor.

Exemplo 1: Consideremos a PA(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28) e escolhamos três termos consecutivos quaisquer: 4, 8, 12 ou 8, 12, 16 ou ... 20, 24, 28. Observemos que o termo médio é sempre a média aritmética dos outros
dois termos:

$$\frac{4+12}{2} = 8\,,\ \frac{8+16}{2} = 12\,,\ \frac{12+20}{2} = 16$$

P2: **Termo Médio**

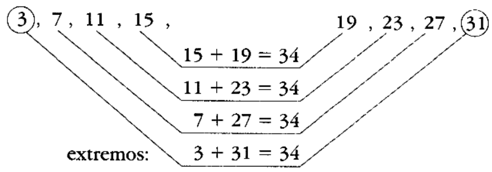
Numa PA qualquer de número ímpar de termos, o termo do meio(médio) é a média aritmética do primeiro termo e do último.
Consideremos a PA (3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21) e o termo médio é 12. Observemos que o termo médio é sempre a média aritmética do primeiro e do último.

$$\frac{3+21}{2} = 12$$

P3: Termos Equidistantes

Exemplo:
Consideremos a PA(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31).

$$\left.\begin{array}{l} 7 \text{ e } 3 \\ 11 \text{ e } 23 \\ 15 \text{ e } 19 \end{array}\right\}$$ São os termos equidistantes dos extremos 3 e 31.



Interpolação Aritmética

Em toda sequência finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, os termos a_1e a_n são chamados extremos e os demais são chamados meios.

APÊNDICE C: REVISÃO DE PA - FASE 3

Interpolar ou inserir k meios aritméticos entre os números a e b, significa obter uma PA de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com n = k+2 termos.

Para determinar os meios dessa PA é necessário calcular a sua razão.

Exemplo 1: Interpolar 6 meios aritméticos entre 7 e 42 de modo que a_1= 7 e a_8= 42.

Solução:

Exemplo 2 - Quais os elementos de uma P.A. em que devemos interpolar sete meios aritméticos entre os números 1 e 17?

Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Em uma pequena escola do principado de Braunschweig, Alemanha, em 1785, o professor Büttner propôs aos alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um garoto de apenas oito anos de idade aproximou-se do professor mostrando-lhe em sua prancheta o resultado. O professor, assombrado, constatou que o resultado estava certo. Aquele garoto viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Karl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por ele foi simples e elegante: o menino percebeu que a soma do primeiro número, 1 com o último, 100 é igual a 101; a soma do segundo número, 2 com o penúltimo 99, é igual a 101; a soma do terceiro número, 3 com o antepenúltipo, 98, é igual a 101; e assim por diante, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos. Como são possíveis 50 somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

1+2+3+4+...+97+ 98+99+100= 50*101= 5050.

Esse raciocínio, que já foi apresentado na aula 3, pode ser estendido para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão. A demonstração completa da fórmula da Soma de um P.A. encontramos facilmente em qualquer livro. Portanto vamos apresentar a Fórmula da Soma de uma Progressão Aritmética finita:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}}$$

Onde: $\boldsymbol{S_n}$ = Soma do n primeiros termos da P.A.

Exemplo 01: Achar a soma dos 30 primeiros termos da P.A. (2,5,...).

Atividade 03

Questão 01 - Um automóvel percorreu 30km no primeiro dia de viagem, 40km no segundo dia, 50km no terceiro dia e assim sucessivamente. Qual é a distância total percorrida em 20 dias de viagens?

Questão 02 - Um ciclista percorre 40 km na primeira hora; 34 km na segunda hora, e assim por diante, formando uma progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 6 horas?

Questão 02 - Um técnico recebeu a tarefa de organizar todos os documentos de um departamento em apenas uma semana. Se ele começou no domingo organizando 15, na segunda-feira 23 e assim por diante até terminar, quantos documentos ele organizou no total?

a) 32

b) 237

c) 220

d) 273

e) 63

APÊNDICE D: REVISÃO DE PG - FASE 3.

Universidade Federal do Amapá – UNIFAP

Departamento de Pós-Graduação

Mestrado Profissional e Matemática

Engenharia Didática - Sequência Didática (Revisão de PA e PG)

Local de Aplicação: E. E. PROF.º RUTH DE ALMEIDA BEZERRA

Professor: Paulo Afonso Pantoja Borges

Aluno (a): ________________________________

SEQUÊNCIAS: PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Revisão de Potenciação

Seja um número $\boldsymbol{a}$ elevado ao expoente $\boldsymbol{n}$, o número $\boldsymbol{a}$ será multiplicado por ele mesmo uma quantidade de fatores $\boldsymbol{n}$, tendo como resultado um valor $\boldsymbol{b}$ chamado de potência, veja abaixo:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n vezes}} = \mathbf{b}$$

Temos que :

a : É chamado de **Base.**

n : É chamado de **Expoente.**

b : É chamado de **Potência.**

Exemplos:

a) $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{4} \cdot \underbrace{2}_{x\,2} = 8$

b) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{3 \cdot 3}_{9} \cdot \underbrace{3}_{x\,3}}_{27} \cdot \underbrace{3}_{x\,3}}_{81}$$

c) $4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{4 \cdot 4}_{16} \cdot \underbrace{4}_{x\,4}}_{64} \cdot \underbrace{4}_{x\,4}}_{256}$$

d) $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

$$\underbrace{\underbrace{10 \cdot 10}_{100} \cdot \underbrace{10}_{x\,10}}_{1000}$$

Agora vamos escrever multiplicações em forma de potenciação.

Exemplos:

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

Perceba que o número que se repete (o sete), é a base da potência; e a quantidade de fatores que se repete a base é o expoente (o expoente).

Mais exemplos:

b) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^5$

c) $8 \cdot 8 = 8^2$

d) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^{10}$

e) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5$

As igualdades abaixo são verdadeiras:

1) $a^x . a^y = a^{x+y}$

- $5^6 . 5^2 = 5^{6+2} = 5^8$
- $10^2 . 10^6 = 10^{2+6} = 10^8$

2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

- $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$
- $\frac{3^2}{3^5} = 3^{2-5} = 3^{-3}$

3) $(a^x)^y = a^{x.y}$

- $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6$
- $(2^3)^{-2} = 2^{3.(-2)} = 2^{-6}$

4) $a^x = a^y \quad \rightarrow \quad x = y$

- $10^3 = 10^y \quad \rightarrow \quad y = 3$
- $7^x = 7^{-2} \quad \rightarrow \quad x = -2$

Exercício 01 sobre Potências

QUESTÃO 01 – Calcule as potências;

a) $3^3 =$

b) $(-2)^2 =$

c) $(-2)^3 =$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

QUESTÃO 02 – Use as propriedades de potências e reduza a uma única potência.

a) $(3^7)^2 =$

b) $5^5 \,.\, 5^6 =$

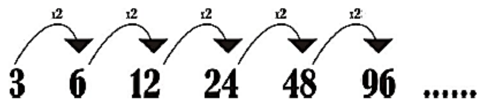
c) $2^8 \div 2^4 =$

d) $\frac{3^4 \,.\, 3^7}{(3^2)^3} =$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Definição: Progressão geométrica (ou simplesmente **PG**) é uma sequência de números não nulos em que cada um deles, multiplicado por um número fixo, fornece o próximo elemento da sequência. Esse número fixo chama-se **razão (q)**, e os elementos da sequência são os termos da progressão geométrica.

Por exemplo, vamos obter os termos de uma progressão geométrica de razão 2, partindo do número 3.



Observe que $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = 2$

A razão **(q)** de uma P.G é qualquer termo, a partir do segundo, dividido pelo termo anterior.

Como a razão $\boldsymbol{q} = \mathbf{2}$, temos:

$a_1 = 3$

$a_2 = 3\,.\,2 = \mathbf{6} \longrightarrow a_2 = a_1.2$

$a_3 = 6\,.\,2 = \mathbf{12} \longrightarrow a_3 = (a_1.2).2 = a_1.\mathbf{2^2}$

$a_4 = 12\,.\,2 = \mathbf{24} \longrightarrow a_4 = (a_1.\mathbf{2^2}).2 = a_1.\mathbf{2^3}$

$a_5 = 24\,.\,2 = \mathbf{48} \longrightarrow a_5 = (a_1.\mathbf{2^3}).2 = a_1.\mathbf{2^4}$

$a_6 = 48\,.\,2 = \mathbf{96} \longrightarrow a_6 = (a_1.\mathbf{2^4}).2 = a_1.\mathbf{2^5}$

Exemplo:

a) (2, 4, 8, 16, ...) $\quad a_1 = 2; \quad q = 2$

Fórmula do Termo Geral

Seja uma P.G $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, com razão q.

$$a_1 = a_1$$

APÊNDICE D: REVISÃO DE PG - FASE 3.

$a_2 = a_1.\,q \longrightarrow a_2 = a_1.q^1$

$a_3 = a_2.\,q \longrightarrow a_3 = a_1.\,q.q \longrightarrow a_3 = a_1.q^2$

$a_4 = a_3.\,q \longrightarrow a_4 = a_1.\,q^2.q \longrightarrow a_4 = a_1.q^3$

$a_5 = a_4.\,q \longrightarrow a_5 = a_1.\,q^3.q \longrightarrow a_5 = a_1.q^4$

(...)

Perceba que o termo que nós queremos de uma P.G. é igual ao primeiro termo multiplicado pela razão q elevada ao número do termos menos um, ou seja,...

$$\boldsymbol{a_n = a_1.q^{n-1}}$$

Onde;

a_n*: é o termo que queremos encontrar*

a_1*: é o primeiro termo da P.G.*

q*: é a razão da P.G.*

n*: é o número de termos da P.G.*

Resolução de Exercícios 02

QUESTÃO 01 – Uma sequência numérica orientada sob forma de multiplicação é composta por 6 elementos onde o primeiro destes é 5 e a sua razão é 4. Determine o último termo desta sequência.

a) 1 024
b) 2048
c) 4 096
d) 5 120

QUESTÃO 02 – Determine o 12ª elemento de uma progressão geométrica onde o primeiro elemento é 1 e a razão é 2.

a) 512
b) 1024
c) 2048
d) 4 096

Propriedades da PG

P1 → O produto de dois termos equidistantes dos extremos de uma PG finita é igual ao produto dos extremos.

1 3 9 27 81 243

9.27 = 243

3.81 = 243

1.243 = 243

P2 → Qualquer termo de uma PG, excluídos os extremos, é a média geométrica entre o seu antecedente e o seu consequente .

2	**4**	**8**	**16**	**32**

$4 = \sqrt{2.8}$ $8 = \sqrt{4.16}$ $32 = \sqrt{16.64}$

P3 → Numa PG de números ímpar de termos, o termo médio é a média geométrica dos extremos ou dos termos equidistantes dos extremos.

3 6 12 24 48

$12 = \sqrt{3.48}$ $12 = \sqrt{6.24}$

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS 03

QUESTÃO 01 – Sabendo que as sequências são Progressões Geométricas, use as propriedades estudadas para encontrar os termos desconhecidos:

i) $\boldsymbol{(5, a_2, a_3, a_4, 405\,)}$

a) $a_3 =$

b) $a_2.a_4 =$

c) $q =$

d) $a_2 =$ e $a_4 =$

ii) $\mathbf{(4, a_2, 16, a_4, 1024)}$

e) $a_2 =$ e $\boldsymbol{a_4 =}$

f) $q =$

Soma dos termos da PG

Para demonstrarmos a fórmula da soma dos termos de uma PG finita, considere a PG finita de *n* termos:

(1) $(a_1, a_2, a_3, \ \dots, a_{n-1}, a_n)$

Seja S_n a soma dos *n* termos desta PG:

(2) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

Ou escrevendo-a de outra maneira:

(3) $S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \cdots + a_1.q^{n-2} + a_1.q^{n-1}$

Sabemos que se multiplicarmos ambos membros de uma igualdade por uma constante, esta igualdade continuará válida. Vamos multiplicar a igualdade (3) por uma constante de valor conveniente **q**:

(4) $S_n.q = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 \dots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n$

Observando as relações (3) e (4), notamos que a parcela a_1 só aparece em (3) e a parcela $a_1.q^n$ só aparece em (4). As demais parcelas são comuns entre as duas relações. Para que estas parcelas sejam eliminadas, subtraímos (3) de (4):

$$S_n.q - S_n = a_1.q^n - a_1$$

Colocando S_n e $a_1$em evidência em ambos e membros, temos:

$S_n.(q-1) = a_1.(q^n - 1)$

Isolando S_n, chegamos a fórmula da soma dos termo de uma progressão geométrica.

Logo, $\boldsymbol{S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{(q-1)}}$

Exemplos: Determine a soma dos oito primeiros termos da PG (2, 4, 8,16, ...).

Temos então que:

$a_1 = 2$ q = 2 n = 8

Aplicamos a fórmula dada em (8):

$$S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{(q-1)} = \frac{2.(2^8-1)}{(2-1)} =$$

$$= \frac{2.(256-1)}{(2-1)} = \frac{2.(255)}{1} = 510$$

Exemplo: Dê a soma dos termos da seguinte PG (7,14,28, ... , 3584).

Para utilizarmos a fórmula da soma é preciso saber quem é o 1º termo, a razão e a quantidade de elementos que essa PG possui.

$a_1 = 7$

$q = 2$

$n = ?$

$S_n = ?$

Precisamos encontrar a quantidade de elementos que possui essa PG, utilizando a fórmula do termo geral.

$$\boldsymbol{a_n = a_1.q^{n-1}}$$

$$\mathbf{3584 = 7.2^{n-1}}$$

$$\mathbf{\frac{3584}{7} = 2^{n-1}}$$

$$\mathbf{512 = 2^{n-1}}$$

APÊNDICE D: REVISÃO DE PG - FASE 3.

$$2^9 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 9$$

$$n = 9 + 1$$

$$n = 10$$

Agora que encontramos o número de termos, substituimos na fórmula da soma.

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$S_{10} = \frac{7.(2^{10} - 1)}{(2 - 1)}$$

$$S_{10} = \frac{7.(1024 - 1)}{1}$$

$$S_{10} = 7.1023$$

$$S_{10} = 7161$$

ATIVIDADE

Questão 01 – Em um surto epidêmico ocorrido em certa cidade com cerca de 10.000 habitantes, cada indivíduo infectado contaminava 10 outros indivíduos no período de uma semana. Supondo-se que a epidemia tenha prosseguido nesse ritmo, a partir da contaminação do primeiro indivíduo, pode-se estimar que toda a população dessa cidade ficou contaminada em, aproximadamente:

a) 28 dias
b) 5 dias
c) 42 dias
d) 49 dias

Questão 02 – Uma fábrica vendia 12 camisetas por mês para certa rede de academias desde janeiro de um determinado ano. Devido ao verão, essa venda foi triplicada a cada mês, de setembro a dezembro. O total de camisetas vendidas nesse quadrimestre e a média de vendas, por mês, durante o ano, foi, respectivamente,

a) 1.536 e 128
b) 1.440 e 128
c) 1.440 e 84
d) 480 e 84
e) 480 e 48

Questão 03 – Em uma colônia de bactérias, uma bactéria divide-se em duas a cada hora. Determinar o número de bactérias originadas de uma só bactéria dessa colônia depois de 15 horas.

Questão 04 – Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da 7ª geração que serão descendentes de uma única coelha?

APÊNDICE E: SEQUÊNCIA DIDÁTICA - FASE 3.

Universidade Federal do Amapá – UNIFAP

Departamento de Pós-Graduação

Mestrado Profissional e Matemática

Engenharia Didática – 3ª Fase: Sequência Didática - EJA
Local de Aplicação: E. E. PROF.º RUTH DE ALMEIDA BEZERRA

Professor: Paulo Afonso Pantoja Borges

Aluno (a): ________________________________

RECORRÊNCIA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PA E PG

RECORRÊNCIA LINEAR DE 1ª ORDEM

Definição 01: Uma recorrência linear de 1ª ordem é uma regra que permite calcular qualquer termo em função do termo imediatamente anterior e que possua um termo com valor inicial definido.

Definição 02: Uma relação de recorrência é dita linear, quando existe uma função linear que relaciona cada termo aos termos anteriores. E ainda, é dita de *primeira ordem* quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele, ou seja, quando a_n está em função de a_{n-1}.

Agora vamos analisar dois exemplos:

Exemplo 01: Observe a sequência dos números ímpares;

$$(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$$

Perceba que para encontrar um termo, por recursão, basta pegarmos o termo anterior e adiocionarmos 2, assim teremos:

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

Para encontrar o termo, por exemplo a_7, temos que adicionar o número dois ao termo anterior, isto é,

$$a_7 = a_6 + 2$$

Exemplo 02: Observe a sequência dos números pares não negativos;

$$(2, 4, 6, 8, \dots)$$

Do mesmo modo que no exemplo anterior, percebemos a mesma configuração na forma de encontrar um termo, isto é, através do anterior adicionado a 2. Logo, teremos a mesma recorrência do exemplo anterior.

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

Então, como fazer para que uma lei de recorrência defina uma única sequência?

A resposta é bem simples, basta definirmos o primeiro elemento da sequência, isto é, sabendo qual é o primeiro elemento, saberemos o ponto inicial da recorrência e por sua vez como ela se comporta e como ela é de fato. Assim, para os dois exemplos termos:

A sequência por recorrências dos números ímpares é definida por:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

E a sequência por recorrências dos números pares é definida por:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}, \textit{ para } a \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para que não haja ambiguidades nas sequências definidas por recorrência, faz-se necessário informar qual é o primeiro termo da sequência.

Uma equação de recorrência na qual cada termo depende exclusivamente dos anteriores é dita *homogênea*. Se, além dos termos anteriores, cada elemento da sequência está também em função de um termo independente da sequência, a recorrência é dita *não-homogênea*.

- **Recorrência linear de 1ª ordem homogênea**

Uma recorrência linear de 1ª ordem é da forma:

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$$

Contudo, para que a recorrência acima seja homogênea, temos que $f(n) = 0$. Assim, teremos:

$$a_{n+1} = g(n)a_n$$

Vamos nos interessar nas recorrências em que $g(n) = q$, tal que, q seja uma constante real. Com isso, restringimos a nossa recorrência, na seguinte

$$\begin{cases} a_{n+1} = q \, . \, a_n \\ a_1 = c \end{cases}$$

O que devemos entender da recorrência acima?

Que para encontrarmos um termo, multiplicamos o anterior por uma constante real q. Mais abaixo, teremos um exemplo de como resolver, ajudara no entendimento.

Resolução de uma recorrência linear homogênea

Resolver uma recorrência é encontrar uma fórmula fechada, tal que, esta servirá para encontrar qualquer termo da sequência definida por recorrência, não sendo mais necessário se chegar em determindado termo através do termo anterior.

Observe, no exemplo baixo, como se resolve uma recorrência linear de 1ª ordem.

Exemplo 03: Seja uma sequência definida por recorrência, em que o primeiro termo é 5 e seguinte é o anterior multiplicado por 2. Encontre uma fórmula fechada que generalize esse problema, depois, usando a fórmula, calcule o termo a_{10}.

Solução: Vamos resolver o problema da seguinte forma: partiremos do segundo elemento de acordo com o que está escrito no enunciado, sempre partindo para o próximo em função do anterior, veja,

$$a_2 = a_1 . 2$$
$$a_3 = a_2 . 2$$
$$a_4 = a_3 . 2$$
$$a_5 = a_4 . 2$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} . 2$$

Agora multiplicamos membro a membro cada uma das equações, reduzindo em uma única equação, observe:

$$a_2 . a_3 . a_4 \ldots a_{n-1} . a_n = a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots a_{n-1} . 2^{n-1}$$

Perceba que no primeiro e no segundo membros temos apenas multiplicações, e ainda, em ambos temos o produto $(a_2 . a_3 . a_4 \ldots a_{n-1})$. Logo, podemos simplificar ambos os lados chegando na seguinte fórmula fechada:

$$a_n = a_1 . 2^{n-1}$$

Como $a_1 = 5$, então ficamos com

$$a_n = 5 . 2^{n-1}$$

Para calcular a_{10}, basta substituir $n = 10$, na fórmula acima, isto é,

$$a_{10} = 5 . 2^{10-1}$$
$$\Rightarrow a_{10} = 5 . 2^9$$
$$\Rightarrow a_{10} = 5 . 512$$
$$\Rightarrow a_{10} = 2560$$

Logo, o décimo termo da sequência é 2560.

Com isso percebemos, no exemplo 03, que a relação de recorrência descreve uma progressão geométrica, e que a recorrência generaliza problemas dessa natureza.

Portanto, podemos generalizar ainda mais o exemplo 03, colocando no lugar do 5 um número qualquer, escolhemos a letra c para representar tal número, e no lugar do número 2, vamos colocar a letra q. Assim, teremos a recorrência dada por:

$$\begin{cases} a_{n+1} = q \,.\, a_n \\ a_1 = c \end{cases}$$

A fórmula fechada que resulta desta recorrência é

$$a_n = c \,.\, q^{n-1}$$

Tal fórmula representa o termo geral de uma progressão geométrica. Portanto, as recorrências lineares homogênes acima generalizam as progressões geométricas.

Recorrência linear de 1ª ordem não - homogênea

Uma recorrência linear de 1ª ordem não homogênea é da forma:

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$$

Porém, vamos estudar apenas os casos, em que $g(n) = 1 \ e \ f(n) = r$, em que r é uma costante real. Logo, teremos a seguinte recorrência:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + r \\ a_1 = c \end{cases}$$

Entende-se a recorrência acima da seguinte forma: para encontrar qualquer termo, temos que adicionar uma constante real r ao termo anterior, sempre levando em consideração que $a_1 = c$, para c um número real dado.

Resolução de uma recorrência linear não homogênea

A resolução das recorrências não homogêneas é feita de modo parecido com as das recorrências homogêneas. Veja o exemplo.

Exemplo 04: Seja uma sequência definida por recorrência, em que o primeiro termo é 5 e seguinte é o anterior somado por 2. Encontre uma fórmula fechada que generalize esse problema, depois, usando a fórmula, calcule o termo a_{15}.

Solução: Vamos resolver o problema da seguinte forma: partiremos do segundo elemento de acordo com o que está escrito no enunciado, sempre partindo para o próximo em função do anterior, veja,

$$a_2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 2$$
$$a_4 = a_3 + 2$$
$$a_5 = a_4 + 2$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + 2$$

Agora somamos membro a membro cada uma das equações, reduzindo em uma única equação, observe:

$$a_2 + a_3 + a_3 \ldots + a_{n-1} + a_n =$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + (n-1).2$$

Perceba que no primeiro e no segundo membros temos adições, e ainda, em ambos temos o produto $(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1})$. Logo, podemos simplificar ambos os lados chegando na seguinte fórmula fechada:

$$a_n = a_1 + (n-1).2$$

Como $a_1 = 5$, então ficamos com

$$a_n = 5 + (n-1).2$$

Para calcular a_{15}, basta substituir $n = 15$, na fórmula acima, isto é,

$$a_{15} = 5 + (15-1).2$$
$$\Rightarrow a_{15} = 5 + (14).2$$

$$\Rightarrow a_{15} = 5 + 28$$

$$\Rightarrow a_{15} = 33$$

Logo, o décimo primeiro termo da sequência é 33.

Do mesmo modo que no exemplo 03, podemos

Resolução de problemas de PA e PG.

Segundo os PCNs, "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la" (BRASIL, 1997, p. 44).

Seguindo a ideia acima, vamos resolver problemas matemáticos sobre PA e PG utilizando as 4 etapas definidas por George Polya (1978):

1ª Etapa – Compreender o Problema – Temos que compreender do que se trata o problema, assim podemos construir esquemas para organizar a situação proposta.

2ª Etapa – Estabelecimento de um Plano – Após a leitura e identificação do que o problema pede, temos que relacionar o problema com os conteúdos que vimos anteriormente para que encontremos maneiras possíveis de solucionar o problema.

3ª Etapa – Execução do Plano – É uma das fases mais importantes no processo. Aqui, executa-se o plano, e as estratégias pensadas anteriormente.

4ª Etapa – Retrospecto ou Verificação – Após chegarem a uma resposta, e realizado a correção. No caso de acerto, verifica-se, se realmente haviam seguido caminhos matemáticos permitidos e corretos e será mostrado outros métodos de resolução que poderiam ser utilizados. No caso de erro, pode-se trabalhar a resolução do problema com base no próprio erro, pois assim vocês perceberão o que estavam errando.

Agora vamos resolver dois problemas sobre PA e PG utilizando essa etapas descritas por George Polya.

PROBLEMA 01: Mateus quer comprar um tablet de 450 reais, e para isso resolveu poupar o dinheiro de sua mesada em um cofrinho. Para se chegar ao valor do tablet de forma mais rápida, a mãe de Mateus resolveu ajudá-lo da seguinte forma: Ele daria os seus 50 reais da mesada todo mês a partir de janeiro, e sua mãe ajudaria sempre com 20 reais a mais em relação ao mês anterior a partir do segundo mês. Nas circunstâncias descritas acima, responda as seguintes perguntas:

a) Do que se trata o problema?

b) Quantos reais Mateus poupou no 5º mês?

c) Existe uma fórmula para ajudar na resolução do problema? Qual?

d) Quantos meses foram necessários para que o menino conseguisse comprar o tablet?

e) Em qual mês Mateus completou a quantia para comprar o objeto?

f) Quantos reais a mãe de mateus ajudou na poupança?

g) Encontre a fórmula do termo geral, por recorrência.

PROBLEMA 02: A cunicultura é a criação de coelhos. Seu Raimundo se tornou cunicultor e em sua fazenda começou a criação com 4 casais no mês de julho de 2022. Observou-se que a criação quadriplicava por mês, em relação ao mês anterior. Seu Raimundo queria muito, que ainda no ano de 2022, sua produção chegasse em 1000 coelhos. Séra que seu desejo se concretizou?

Antes de resolvermos o problema acima, temos que responder os problemas abaixo:

a) Do que se trata o problema?

b) Para resolver o problema, é necessário contar mês após mês? Existe alguma fórmula para se chegar ao resultado?

c) Se existe uma fórmula, você sabe identificar os dados do problema e substituir na fórmula?

d) De acordo com o que você respondeu anteriormente, agora você consegue responder o problema? Isto é, se cumpriu o desejo de seu Raimundo?

e) Quantos coelhos nasceram no mês de Dezembro?

f) Em quantos meses a produção chegou em 1000 coelhos?

g) Encontre a fórmula do termo geral, por recorrência.

APÊNDICE F: QUESTIONÁRIO DA FASE 4.

Universidade Federal do Amapá – UNIFAP

Departamento de Pós-Graduação

Mestrado Profissional e Matemática

Engenharia Didática – 4ª Fase: Análise a Posteriori
Local de Aplicação: E. E. PROF.º RUTH DE ALMEIDA BEZERRA

Professor: Paulo Afonso Pantoja Borges

Aluno (a): ________________________________
Aluno (a): ________________________________

QUESTIONÁRIO FINAL SOBRE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Recorrência

Sabemos que através da recorrência conseguimos determinar um termo a partir do termo anterior, e além disso, podemos encontrar uma fórmula fechada que nos permite calcular qualquer termo da referida sequência definida por recorrência.

Exemplo: Seja a sequência dos números pares definida por recorrência.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}, \textit{para } n \in \mathbb{N}.$$

Temos como resultado desta recorrência uma fórmula fechada, que determina e generaliza um termo qualquer da ***Progressão Arimética***, isto é,

$$a_n = a_1 + (n-1).2$$

Ou

$$a_n = 0 + (n-1).2$$

$\boldsymbol{a_n = 2n - 2}$, para *n* pertencente aos naturais. Observe que para cada valor de n pertencente aos naturais, você determinará um número par. Assim,

$$(0, 2, 4, 6, 8, \dots).$$

De modo análogo, encontra-se a fórmula fechada das Progressões Geoméricas.

Partindo dessa ideia e das ideias vistas em aulas anteriores resolva os problemas.

PROBLEMA 01 - (MILANI, 2011 - Adaptado): Você decide economizar dinheiro da seguinte forma: no primeiro mês, guarda R$20,00. Nos meses seguintes, guarda sempre R$10,00 a mais que no mês anterior.

a) Qual o termo geral da sequência?

b) Supondo que a economia começou no mês de Janeiro, então quanto foi guardado no mês de Dezembro?

c) Qual foi o total economizado em 12 meses?

APÊNDICE F: QUESTIONÁRIO DA FASE 4.

PROBLEMA 02 - (Enem PPL 2013 - Adaptado): Para um principiante em corrida, foi estipulado o seguinte plano de treinamento diário: correr 300 metros no primeiro dia e aumentar 100 metros por dia, a partir do segundo. Para contabilizar seu rendimento, ele utilizará um chip, preso ao seu tênis, para medir a distância percorrida nos treinos. Considere que esse chip armazene, em sua memória, no máximo 5 km de corrida/caminhada, devendo ser colocado no momento do início do treino e descartado após esgotar o espaço para reserva de dados.

Se esse atleta utilizar o chip desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias consecutivos esse chip poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário?

PROBLEMA 03 - (MILANI, 2011 - Adaptado): Certa epidemia causada por um vírus atingiu uma cidade. No primeiro dia foram registrados 60 casos; no segundo dia, 180 novos casos; no terceiro 540, e nos dias subsequentes o número de novos casos se manteve na mesma progressão.

a) Em que dia a estimativa atingiria 14 580 novos casos?

b) Qual fórmula generaliza o problema, em relação ao contágio diário?

c) Quantos pessoas foram infectadas em 10 dias?