UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

SANDRO DE SOUZA FIGUEIREDO

TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ DO TENSOR DE CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Macapá

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

SANDRO DE SOUZA FIGUEIREDO

TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ DO TENSOR DE CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Física da Universidade Federal do Amapá como requisito para a obtenção da graduação em Licenciatura Plena em Física sob orientação do Prof. Dr. Robert Ronald Maguiña Zamora.

Macapá

2009

SANDRO DE SOUZA FIGUEIREDO

TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ DO TENSOR DE CAMPO ELETROMAGNÉTICO

AVALIADORES

____

Prof. Dr. Robert Ronald Maguiña Zamora

Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

____

Prof. Dr. Henrique Duarte Filho

Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

____

Prof. Dr. Gusman Isla Chamilco

Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Avaliado em: ____/____/____

Macapá

2009

A Deus, à minha família e amigos.

“O grande livro da Natureza está
escrito em caracteres matemáticos.”

Galileu Galilei

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso abordará as equações de James Clerk Maxwell (1865), ou também a chamada teoria unificada dos fenômenos eletromagnéticos, as quais constituem uma representação própria do campo eletromagnético clássico. Elas representam expressões matemáticas de certos resultados experimentais da teoria eletromagnética. Sendo assim, neste trabalho serão apresentadas as equações de Maxwell, onde se pretende descrevê-las fisicamente, bem como apresentá-las na forma tensorial. Para isso, será utilizado como ferramenta matemática o cálculo tensorial. Será observado que este formalismo conduz também a uma apresentação matematicamente elegante de leis físicas. Essa referida abordagem tem reconhecida importância, pois possui como base teórica duas das mais importantes teorias da Física na explicação dos fenômenos da natureza: a Relatividade (neste trabalho utiliza-se apenas a Relatividade Restrita) e o Eletromagnetismo. Além disso, será analisado como o tensor do campo eletromagnético se comporta aplicando as transformações de Lorentz.

Palavras chave: Transformação de Lorentz; tensor de campo; Calculo Tensorial; Relatividade Restrita.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

Os fenômenos elétricos e magnéticos sempre despertaram a curiosidade do ser humano e por muito tempo foram considerados e estudados como dois fenômenos de natureza distinta, sem relação entre si. Apenas no século XIX, com a experiência de Oersted, finalmente ficou comprovado que esses dois fenômenos aparentemente distintos são na verdade duas manifestações da mesma entidade física: o **eletromagnetismo**.

O eletromagnetismo é uma das bases mais importantes dos fenômenos da natureza e mais bem fundamentadas teoricamente. Eis a necessidade de estudá-lo, de explorar suas teorias. As equações de Maxwell, por exemplo, forneceram a melhor descrição dos fenômenos eletromagnéticos e proporcionaram a base necessária para grandes avanços tecnológicos que as gerações atuais desfrutam; principalmente no que diz respeito à comunicação. Além disso, mais do que explicar os fenômenos eletromagnéticos, as equações de Maxwell também forneceram uma nova visão para óptica, uma vez que se descobriu que a luz é uma onda eletromagnética (formada por oscilações dos campos elétricos e magnéticos). Este momento da História da Física é considerado por muitos como o momento mais bonito e mais marcante desta ciência fundamental.

Porém, como se sabe, a teoria de Maxwell do eletromagnetismo era conflitante com o princípio da relatividade de Galileu, no qual se baseava a Mecânica de Newton. Ora, se eram conflitantes, uma das duas teorias falhava na descrição da realidade física e necessitava de modificação. A Teoria da Relatividade de Einstein surge nesse contexto conservando as equações de Maxwell e estabelecendo um novo princípio de relatividade, no qual não apenas as leis da Mecânica são invariantes numa transformação de coordenadas, mas sim todas as leis da Física.

E, assim como o eletromagnetismo, ela é outra teoria física bem sucedida de importância merecidamente reconhecida e gerou uma grande revolução nas idéias e conceitos físicos até então bem consolidados. Um bom exemplo disso é a necessidade de um espaço quadrimensional em troca do espaço euclidiano tridimensional. Neste espaço com quatro dimensões, o tempo passa a ser a nova coordenada, e deixa de ser absoluto, constituindo-se o que se chama de **espaço-tempo**. Esta idéia de espaço com quatro dimensões foi proposta pelo matemático Hermann Minkowski (1864-1909) e forneceu a Einstein a teoria de que precisava: um espaço não-euclidiano. As mudanças conceituais foram tais que a Física Clássica[1] pode ser tratada como um caso limite da Teoria da Relatividade de Einstein, ou seja, para movimentos com baixas velocidades, ou melhor, com baixas energias.

Neste contexto de eletromagnetismo e relatividade restrita, desenvolve-se o presente trabalho que se trata de uma abordagem bibliográfica e tem por objetivo obter o tensor de campo eletromagnético a partir das equações de Maxwell bem como utilizá-lo em algumas aplicações envolvendo o movimento relativo de cargas em referenciais inerciais. Esse tensor eletromagnético citado acima é uma matriz de dezesseis elementos os quais são as componentes dos campos elétricos e magnéticos. Ou seja, o tensor agrupa as duas manifestações do eletromagnetismo.

O formalismo matemático utilizado atualmente pela maioria dos físicos é diferente do formalismo utilizado, por exemplo, nos séculos XVIII, XIX e início do século XX. Os tensores surgiram de uma maneira considerada recente na história das ciências e sua utilização para o estudo mais aprofundado da natureza matemática da própria teoria da relatividade e do eletromagnetismo foi feita pelo já citado Hermann Minkowski e também por Max Abraham (1875-1922). Nos trabalhos dos físicos do fim do século XIX e início do século XX, nos quais foi possível um formalismo para o eletromagnetismo compatível com o princípio da relatividade, as grandezas eletromagnéticas eram tratadas como vetores.

Dar o tratamento tensorial à teoria eletromagnética sob o ponto de vista relativístico, além de ser matematicamente elegante, condensa algumas propriedades dos campos elétricos e magnéticos, a saber: *a transformação relativística entre esses campos que permite, por exemplo, deduzir o campo eletromagnético de uma carga em movimento, dado seu campo (eletrostático) em repouso; as propriedades de simetria do campo elétrico e do campo magnético já que esse tensor em quatro dimensões pode ser considerado como composto por um vetor tridimensional polar (campo elétrico) e por um pseudo-vetor (vetor axial)*

[1] Entende-se por Física Clássica às teorias da Física anteriores ao século XX (suas teorias principais são: A Mecânica de Newton, a Termodinâmica e o Eletromagnetismo); A física Moderna, por sua vez, é após o século XX (principais teorias: as duas Teorias da Relatividade e a Mecânica Quântica).

tridimensional ou tensor antissimétrico espacial (campo magnético; e também a existência de invariantes do campo eletromagnético:

$$\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2 = invariante$$
$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = invariante$$

Estas duas equações não têm um significado físico óbvio. A invariância da primeira equação significa que se as intensidades do campo elétrico e do campo magnético são iguais em um sistema de referência, eles continuam iguais em outro. Se $\boldsymbol{B} > \boldsymbol{E}$ $(ou\ \boldsymbol{E} > \boldsymbol{B})$ em um referencial em repouso, eles continuam obedecendo a mesma relação em um referencial em movimento. A segunda expressão significa que se os campos elétricos e magnéticos são mutuamente perpendiculares em um referencial, isto é, $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, então eles também são perpendiculares em outro referencial.

Tais propriedades condensadas na matriz do tensor de campo (o tensor de campo pode ser representado por uma matriz quadrada na qual cada elemento representa uma componente do tensor) evidenciam a facilidade em se trabalhar com a notação tensorial. Mais que isso, essas equações expressam o fato de os campos elétrico e magnético se manterem perpendiculares em uma onda eletromagnética transversal. O formalismo da matemática tensorial, desenvolvido no início do século XX, é considerado o mais adequado para representar a teoria eletromagnética de Maxwell sob a forma relativística.

É importante perceber também como se deu a evolução dos conceitos físicos. Isto é, como a forma de expressar matematicamente uma lei física foi se modificando ao longo do tempo até chegar à notação atual dos tensores. Por exemplo, Minkowski publicou dois artigos fundamentais para o desenvolvimento do formalismo quadrimensional do eletromagnetismo. Em 1908 Minkowski apresentou o artigo *Grundgleichngen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern* (As equações fundamentais dos fenômenos eletromagnéticos dos corpos em movimento). Neste seu trabalho, Minkowski desenvolve seu formalismo quadrimensional na forma matricial e o aplica para mostrar que as equações da eletrodinâmica se mantêm invariantes sob as transformações de Lorentz. O segundo trabalho, *Raum und Zeit* (Espaço e Tempo), também foi publicado 1908, seis meses após o primeiro e é mais conhecido, tendo sido traduzido para o inglês. Minkowski aplica o formalismo quadrimensional na teoria eletromagnética argumentando a invariância das leis físicas sob transformações de Lorentz e discute aspectos geométricos associados ao novo formalismo quadrimensional.

Minkowski estabeleceu as bases de seu novo formalismo partindo da forma quadrática invariante $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, onde c é a velocidade de propagação da luz no vácuo. As leis físicas seriam expressas com relação a um espaço quadrimensional com coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4, onde x_4 é definida com uma coordenada temporal imaginaria dada por $x_4 = it$. As três coordenadas espaciais e a quarta coordenada temporal são modificadas por uma transformação de Lorentz. O eixo dessa quarta coordenada temporal é perpendicular aos três eixos espaciais.

As equações diferenciais escritas na forma de componentes foram logo substituídas pelos quadrivetores por Minkowski como a ferramenta necessária para que as propriedades de simetria do espaço-tempo aparecessem. Minkowski defendia que a formulação quadrivetorial era necessária para tornar evidente a invariância de Lorentz das equações que também descrevem o comportamento de um campo eletromagnético no éter.

Por sua vez, as equações da eletrodinâmica foram escritas por Minkowski usando o formalismo de quadrivetores, no qual considerou as grandezas eletromagnéticas como funções de x_1, x_2, x_3, x_4. E escreveu as equações de Maxwell no formalismo quadrimensional na forma de componentes, isto é, os campos elétrico (e_x, e_y, e_z) e magnético (m_x, m_y, m_z) são escritos como seis componentes de uma matriz antissimétrica de ordem 4x4:

$$f = \begin{pmatrix} 0 & m_z & -m_y & -ie_x \\ -m_z & 0 & m_x & -ie_y \\ m_y & -m_x & 0 & -ie_z \\ -ie_x & -ie_y & -ie_z & 0 \end{pmatrix}$$

Nota-se nesta matriz que as componentes do campo elétrico estão na última linha e na última coluna, enquanto que as do campo magnético estão nos demais elementos não nulos da matriz. Isto mostra as propriedades de simetria diferentes para os dois vetores. Da forma como está escrita a matriz, o campo elétrico possui o que se chama simetria polar e o magnético, simetria axial (para perceber isto, basta trocar o sinal da linha e da coluna referente à coordenada x).

Minkowski, em seus artigos, difere dois tipos de vetores: os vetores do tipo I e vetores do tipo II. Resumidamente, os vetores do tipo I são vetores no espaço quadrimensional – o espaço-tempo – (na linguagem moderna são os quadrivetores) e podem ser expressos como uma matriz de ordem 4x1. Os vetores do tipo II são aqueles formados pela união de dois vetores do tipo I e podem ser expressos por uma matriz de ordem 4x4. Por exemplo, considerando dois vetores do tipo I, $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{s}$, com quatro componentes, uma vez que se está no espaço-tempo. O vetor do tipo II seria expresso então pela matriz de componentes:

$$w_2s_3 - w_3s_2;\ w_3s_1 - w_1s_3;\ w_1s_2 - w_2s_1;$$
$$w_1s_4 - w_4s_1;\ w_2s_4 - w_4s_2;\ w_3s_4 - w_4s_3;.$$

Na linguagem moderna, estas componentes do vetor do tipo II são as componentes de um tensor antissimétrico de segunda ordem. Max Von Laue, físico alemão Foi laureado com o Nobel de Física em 1914, pela descoberta da difração dos raios-X em cristais, estudou os artigos de Minkowski e os apresentou de maneira mais didática; descrevendo as propriedades dos tensores usando notação semelhante à notação moderna. Definiu um tensor simétrico como uma grandeza de 16 componentes com a condição de simetria $T_{jk} = T_{kj}$.

É muito interessante expor a teoria eletromagnética sob a forma tensorial para acadêmicos de graduação, uma vez que a teoria de tensores só é estudada nos cursos de pós-graduação. Este trabalho poderá ser utilizado como auxílio aos alunos que estão estudando a Teoria Eletromagnética.

Neste trabalho, o segundo capítulo tem como propósito situar o leitor à notação utilizada na relatividade restrita e, supondo que ele já possua certa familiaridade com esta teoria, relembrar alguns conceitos relativísticos que são utilizados atualmente para descrição dos efeitos relativísticos como quadrivetores, espaço-tempo, intervalo entre dois eventos, etc. Além disso, a transformação de Lorentz é apresentada como uma rotação dos eixos coordenados de um espaço de quatro dimensões sob um ângulo imaginário $i\psi = \varphi$ e esta rotação de eixos será posta em forma matricial, a chamada Matriz de Lorentz. Ainda no segundo capítulo, será estudada a ação que atua em uma carga que se move em um campo eletromagnético. Esta é outra maneira descrever os movimentos dos corpos utilizando os conceitos de Lagrangeana e o princípio de Hamilton no lugar das leis de Newton do movimento. Este capítulo é importante, pois nele a equação que dará origem ao tensor de campo eletromagnético será desenvolvida.

No terceiro capítulo, obtém-se o tensor de campo eletromagnético. Cada elemento da matriz que representa o tensor de campo é calculado de forma didática. Além disso, é importante que o leitor tenha em mente as equações Maxwell para melhor entendimento do desenvolvimento do tensor.

A seguir, no quarto capítulo, como resultado, são obtidas as equações de transformações dos campos, que revelam como os campos elétrico e magnético se comportam quando há um movimento relativo entre dois sistemas de referência. Ou seja, pode-se determinar qual a forma das componentes dos campos em um sistema de referência conhecendo-se a forma desse campo em outro sistema inercial. Ainda no quarto capítulo, algumas aplicações de tensores à teoria eletromagnética serão apresentadas. Por exemplo, a obtenção da equação da força de Lorentz para uma partícula carregada em movimento em um campo magnético e o seu tratamento clássico. Isto é, o caso em que o movimento ocorre com velocidades muito menores que a velocidade da luz.

O quinto capítulo apresenta uma breve conclusão e discussão dos resultados do trabalho. Por fim, espera-se deste trabalho a apresentação de maneira didática de conceitos e notações matemáticas novas para os alunos de graduação, mas que são bastante trabalhadas em pós-graduação, por condensarem a notação matemática. Este é o caso dos tensores de campo, em que uma matriz resume várias propriedades dos campos elétricos e magnéticos e simplificam a dedução de diversas equações conhecidas da dinâmica dos corpos carregados em movimento.

CAPÍTULO II

2. METODOLOGIA

A realização deste trabalho de conclusão de curso foi constituída de duas partes. Uma dedicada à investigação dos conteúdos, do embasamento teórico necessário, que foi feito através de livros, artigos científicos e em pesquisas na internet. A outra, a parte prática, obtém-se a matriz de tensor de campo.

Com relação à primeira parte, que foi a mais longa do desenvolvimento para possibilitar um bom entendimento da teoria e então usá-la na Física, foi feito primeiramente um estudo bibliográfico com relação à transformação de coordenadas. Em seguida, realizaram-se estudos sobre vetores quadridimensionais (incluindo a velocidade e aceleração). Logo após, foi realizada uma revisão dos conceitos da teoria eletromagnética e da relatividade e finalmente estudou-se a teoria dos tensores.

A segunda parte consistiu na utilização dos conceitos físicos e matemáticos investigados para a obtenção da matriz de tensor de campo eletromagnético, assim como mostrar algumas aplicações e por fim expor conclusões sobre o tema trabalhado.

Neste trabalho recomenda-se que para um melhor entendimento, os acadêmicos possuam certa familiaridade dos conceitos em relação à Teoria da Relatividade e Física Moderna.

2.1.REPRESENTAÇÕES RELATIVÍSTICAS

Qualquer teoria que descreva a estrutura fundamental da matéria deve ser coerente com a Teoria da Relatividade. Por isso, uma breve revisão, neste presente capítulo, de alguns pontos desta teoria será de extrema importância para o entendimento do trabalho.

2.1.1. CONCEITOS BÁSICOS DE RELATIVIDADE RESTRITA

O leitor já deve estar bastante familiarizado com o tratamento matemático e as definições conceituais em três dimensões como distância entre dois pontos, vetores tridimensionais, entre outras. Na Teoria da Relatividade, espaço e tempo passam a ser tratados como constituintes da mesma entidade física: o **espaço-tempo**. Com isso, ao invés de três dimensões, têm-se agora quatro: três espaciais e uma temporal. É, pois, de se esperar que as definições bem conhecidas citadas acima devam sofrer modificações.

Inicialmente considere as coordenadas (x, y, z, t) e $(x + dx, y\ + dy, z + dz, t + dt)$ no espaço **quadrimensional**, ou seja, no **espaço-tempo**. Pode-se generalizar o conceito de **distância** entre dois pontos no **espaço**[2] e passar ao conceito de **intervalo** entre dois pontos[3] (ou evento) no **espaço-tempo** e esse intervalo será representado por S e um pequeno deslocamento no espaço-tempo será um diferencial desse intervalo e será representado por dS.

Assim como no espaço em três dimensões a distância se mantinha invariante em uma transformação, no espaço-tempo o intervalo também deve ser invariante (uma vez que a definição de intervalo é uma generalização do caso tridimensional de distância entre dois pontos) no caso, a uma **Transformação de Lorentz** que leva de um referencial inercial a outro qualquer também inercial. Ou seja,

$$dS'^2 = dS^2$$

A quantidade dS está definida matemáticamente da seguinte forma:

$$dS^2 = ct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

O intervalo também pode ser representado da seguinte forma

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - ct^2.$$

Onde c é a velocidade da luz.

---

[2] Algumas vezes durante o texto, quando se fizer referência ao espaço tridimensional, será citado apenas **espaço**; quando se fizer referência ao espaço quadrimensional, será citado **espaço-tempo**.

[3] No espaço-tempo fala-se em **eventos** e não em pontos, um evento fica definido pelo lugar e pelo instante em que ocorre.

Na verdade as duas formas são equivalentes e a escolha de uma ou outra é arbitrária e varia muito de acordo com os autores de livros científicos. O resultado da escolha de umas das notações é apenas alguma mudança na representação matemática (como o aparecimento de um número complexo ou de um sinal) para a descrição de um fenômeno físico, ou seja, são duas formas de se descrever o mesmo assunto e que, no final, as duas formas são equivalentes. Neste trabalho, as duas notações são utilizadas dependendo de qual seja mais conveniente, sem prejuízo nenhum ao entendimento do conteúdo por parte do leitor.

E como o intervalo entre dois eventos deve permanecer invariante para uma mudança de coordenada, tem-se que $dS'^2 = dS^2$, como foi comentado anteriormente. Então,

$$ct'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = ct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.1}$$

Ou ainda,

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - ct'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - ct^2$$

Feita a definição de intervalos, pode-se ainda classificá-los como $dS^2 > 0$ (um número real), chamados de **intervalos temporais,** ou $dS^2 < 0$ (um número imaginário) chamados de **intervalos espaciais.**

Sabe-se, também, do tratamento vetorial em três dimensões, que no espaço tridimensional as quantidades (x, y, z) são vistas como as componentes de um vetor cujo módulo é a raiz da soma dos quadrados de cada componente:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Isto significa que o módulo de um vetor tridimensional está definido de forma positiva. Quando se quer generalizar para quatro dimensões surgem alguns problemas, pois o intervalo não está definido de forma positiva, uma vez que aparece uma subtração de quadrados na sua expressão. A solução é fazer as seguintes definições:

$$X^u = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (ct, x, y, z)$$

$$X_u = (X_0, X_1, X_2, X_3) = (ct, -x, -y, -z). \tag{2.2}$$

Onde X^u e X_u representam o vetor posição em quatro dimensões (isto é, são **vetores tetradimensionais**, que serão abordados na próxima seção). Então o intervalo entre dois eventos é o somatório de um produto das quantidades de índices superiores e inferiores:

$$S^2 = \sum_{u=0}^{3} X^u X_u = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

ou ainda

$$dS^2 = \sum_{u=0}^{3} dX^u dX_u = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.3}$$

assim, o módulo de um vetor em quatro dimensões é feito através de uma operação que funciona de modo análogo ao caso tridimensional do **produto escalar**.

2.1.2. VETORES TETRADIMENSIONAIS (QUADRIVETORES)

Vetor tetradimensional A^u é o conjunto de quatro quantidades A^0, A^1, A^2, A^3 que, nas transformações de coordenadas, se transformam segundo as relações:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c}A'^1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}};\ A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c}A'^0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}};\ A^2 = A'^2;\ A^3 = A'^3.$$

Veja a demonstração no apêndice A.

Em um tetravetor, as componentes A^u são chamadas de **contravariantes**. Enquanto que as componentes A_u são chamadas **covariantes** e valem as relações:

$$A_0 = A^0;\ A_1 = -A^1;\ A_2 = -A^2;\ A_3 = -A^3.$$

E o quadrado de um tetravetor é determinado da seguinte maneira:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = 0. \tag{2.4}$$

Que também pode ser representado como

$$(A^0)(A^0) - (A^1)(A^1) - (A^2)(A^2) - (A^3)(A^3) = 0$$

$$A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3 = \sum_{u=0}^{3} A^u A_u.$$

É muito comum usar a convenção de se subentender o símbolo de somatório quando se têm índices que se repetem duas vezes como na equação acima. Esse processo se chama **índices mudos**, ou ainda **convenção de Einstein**.

2.1.3. TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ COMO UMA ROTAÇÃO DE EIXOS COORDENADOS NO PLANO COMPLEXO.

Agora, serão obtidas as fórmulas de transformação relativística partindo da condição de que o intervalo entre dois eventos é invariante. Vale lembrar que o intervalo pode ser considerado como a distância entre dois pontos de universo correspondentes no sistema de coordenadas quadrimensional.

Em conseqüência disso, pode-se dizer que a transformação buscada deve conservar todas as distâncias no espaço 4-D. Ora, as **rotações conservam as distâncias.** Então é conveniente pensar que a transformação a ser encontrada pode ser representada matematicamente como uma rotação do sistema de coordenadas.

Já foi definido anteriormente que

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

e mais, podem ser definidas também as coordenadas espaciais dos sistemas da seguinte maneira:

$$x^2 = X_1^2, \qquad y^2 = X_2^2, \qquad z^2 = X_3^2, \qquad -c^2t^2 = X_4^2$$

então pode-se escrever

$$S^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.$$

Ou seja, há a presença de uma componente imaginária nas coordenadas espaciais. Isso pelo fato de o intervalo estar negativamente definido, como foi comentado anteriormente. Isto é,

$$-c^2t^2 = X_4^2 \rightarrow X_4 = ict = iX_0$$

Conside a seguinte rotação num plano (onde somente uma coordenada espacial, X_1, e uma temporal, X_4, estão representadas para facilidade de entendimento) sob um ângulo imaginário $i\psi = \varphi$ como na figura.

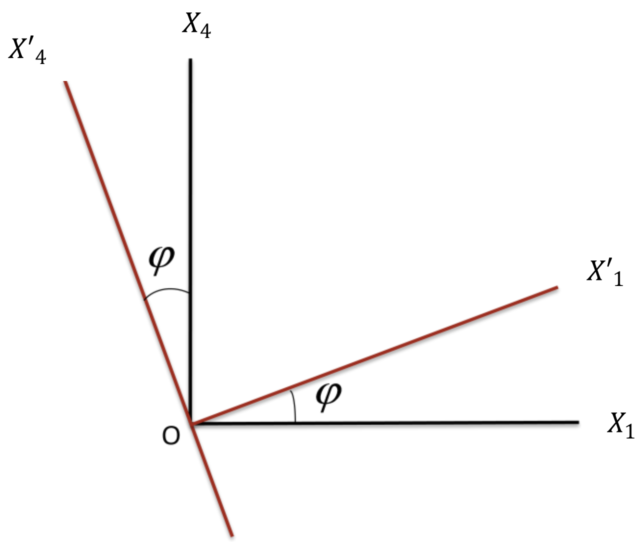

Figura 1. Rotação em um plano complexo sob um ângulo imaginário.

Primeiramente, da Figura 1, pode-se tirar que (veja o apêndice B)

$$\begin{cases} X_1' = X_1 \cos\varphi + X_4 \sin\varphi \\ X_4' = X_4 \cos\varphi - X_1 \sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1' = X_1 \cos\varphi + ict \sin\varphi \\ ict' = ict \cos\varphi - X_1 \sin\varphi \end{cases}$$

Mas deve-se lembrar que $\begin{cases} \cos\varphi = \cos i\psi = \cosh\psi \\ \sin\varphi = \sin i\psi = i \sinh\psi \end{cases}$

Substituindo estes resultados nas equações acima:

$$\begin{cases} X_1' = X_1 \cosh\psi + icti \sinh\psi \Longrightarrow X_1' = X_1 \cosh\psi - ct \sinh\psi \\ ict' = ict \cosh\psi - X_1 i \sinh\psi \Longrightarrow ct' = ct \cosh\psi - X_1 \sinh\psi \end{cases}.$$

Pode-se escrever ainda da seguinte maneira:

$$\begin{cases} t' = t \cosh\psi - \dfrac{x}{c} \sinh\psi \\ x' = x \cosh\psi - ct \sinh\psi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{2.5}$$

Se a Transformação de Lorentz pode ser obtida dessa rotação no plano, então é de se esperar que as equações acima sejam as próprias equações da Transformação de Lorentz. Isto quer dizer que se deve determinar o ângulo φ, o qual pode depender somente da velocidade relativa V entre dois sistemas de referência. Assim sendo, considera-se dois sistemas de referência k e k' em movimento relativo. Adota-se o movimento da origem do sistema k' em relação à origem do sistema k com velocidade relativa V. Nessas condições $x^{'} = 0$ e tem-se:

$$x^{'} = x\cosh\psi - ct\sinh\psi\,,\ se\ x^{'} = 0:$$

$$x\cosh\psi = ct\sinh\psi$$

$$\frac{x}{ct} = \frac{\sinh\psi}{\cosh\psi} = \tanh\psi$$

$$\tanh\psi = \frac{V}{c} = \beta$$

mas lembrando das relações trigonométricas,

$$\cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-(\tanh\psi)^2}},$$

isto é,

$$\cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \qquad (2.6)$$

$$\therefore \sinh\psi = \frac{V}{c}\cosh\psi = \beta\gamma \qquad (2.7)$$

onde se chama $\beta = \frac{V}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Substituindo as equações (2.6) e (2.7) em (2.5) tem-se:

$$\begin{cases} t^{'} = t\gamma - \frac{x}{c}\beta\gamma \\ x^{'} = x\gamma - ct\beta\gamma \\ y^{'} = y \\ z^{'} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^{'} = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x^{'} = \gamma(x - Vt) \\ y^{'} = y \\ z^{'} = z \end{cases} \qquad (2.8)$$

Esta é, portanto, a transformação que se procurava. Pode-se ainda colocar as equações (2.5) na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X_0{'} \\ X_1{'} \\ X_2{'} \\ X_3{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

onde $\begin{cases} X_0' = ct' \\ X_1' = x' \\ X_2' = y' \\ X_3' = z' \end{cases}$ e $\begin{cases} X_0 = ct \\ X_1 = x \\ X_2 = y \\ X_3 = z \end{cases}$.

A primeira matriz do segundo membro da equação (2.9) é a chamada **Matriz de Lorentz**.

Pode-se escrever assim:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nos próximos capítulos a Transformação de Lorentz será mais abordada. Vale ressaltar o fato de ela poder ser interpretada como a rotação de um sistema de coordenadas no espaço quadrimensional, com uma coordenada imaginária em torno da origem considerada fixa.

Agora, será apresentado o estudo de uma carga em movimento em um campo eletromagnético sob o ponto de vista do conceito de **ação**.

2.2. AÇÃO TETRADIMENSIONAL CLÁSSICO-RELATIVÍSTICA DE UMA CARGA EM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Agora neste capítulo, serão abordados alguns conceitos importantes e muito trabalhados na Física, principalmente em problemas da Mecânica Clássica. Uma leitura cuidadosa é indispensável para bom entendimento do texto.

2.2.1. RESULTADOS PRELIMINARES

2.2.1.1. VELOCIDADE QUADRIMENSIONAL

Lembrando que tempo e espaço são constituintes da mesma entidade física, o **espaço-tempo**, pode-se dizer que velocidade é, pois, adimensional e é definida de maneira análoga ao caso de três dimensões. Isto é, a razão do quadrivetor posição pelo intervalo entre dois eventos é:

$$U^u = \frac{dX^u}{dS}, \qquad u = 0, 1, 2, 3 \tag{2.10}$$

mas $dS = \sqrt{c^2\,(dt)^2 - dr^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{dr^2}{c^2\,(dt)^2}\right) c^2\,(dt)^2} = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, onde v é a velocidade ordinária da partícula, isto é, a velocidade com a qual está se movendo.

Lembrando que

$$X^u = (ct, \vec{r}) \Longrightarrow dX^u = (cdt, d\vec{r})$$

$$\therefore U^u = \frac{dX^u}{dS} = \frac{(cdt, d\vec{r})}{cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Note que velocidade quadrimensional é um quadrivetor unitário, pois o módulo do vetor posição X^u é o próprio S.

$$dX_u dX^u = dS^2 \rightarrow \frac{dX_u dX^u}{dS^2} = 1 \rightarrow U_u U^u = 1$$

2.2.1.2.ACELERAÇÃO QUADRIMENSIONAL

É definida de modo análogo ao do caso tridimensional por:

$$W^u = \frac{d^2X^u}{dS^2} = \frac{dU^u}{dS} \tag{2.11}$$

2.2.2. AÇÃO TETRADIMENSIONAL DE UMA PARTÍCULA LIVRE

Para a solução de problemas de Mecânica não existem apenas as leis de Newton. Há outros desenvolvimentos matemáticos que possibilitam descrições das leis da natureza e chegam aos mesmos resultados, porém, dependendo do problema, essa descrição pode ser mais fácil ou não. A saber, tem-se o desenvolvimento Lagrangeano e o Hamiltoniano da Mecânica Clássica. O primeiro utiliza-se de uma função escalar chamada *Lagrangeana* (representada pela L) que é uma função das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas (primeira derivada das coordenadas generalizadas) e do tempo. Para entender este formalismo lagrangeano é preciso entender primeiro estas definições. Coordenadas generalizadas são todas as coordenadas necessárias para a localização de uma partícula ou um sistema de partículas. Por exemplo, para localizar um corpo rígido (sistema cuja distância entre duas partículas quaisquer se mantém sempre a mesma, ou seja, é uma constante) precisa-se de seis coordenadas generalizadas. Que podem ser três coordenadas (x, y, z) para a localização de um ponto qualquer do corpo rígido e mais três ângulos (θ, ϕ, ψ) para a orientação do corpo rígido em relação a este ponto. Então, essas seis coordenadas $(x, y, z, \theta, \phi, \psi)$ são suficientes para localizar um corpo rígido no espaço. Podem-se chamar genericamente essas quantidades de q_i, onde neste exemplo $i = 1, 2, \ldots, 6$. Essas coordenadas recebem o nome de generalizadas porque podem ou não possuir relação com os sistemas de coordenadas usuais.

Estes conceitos são importantes para o desenvolvimento e entendimento do chamado *princípio de Hamilton*, também conhecido como princípio da *mínima ação*. Como foi falado no início do capítulo, aqui será desenvolvida uma formulação da mecânica diferente da mecânica newtoniana, aqui será utilizada a formulação lagrangeana. E um dos princípios básicos da mecânica lagrangeana é o conceito de ação. A Mecânica Lagrangeana afirma que para cada sistema mecânico existe certa integral que é chamada de *ação* (que será representada aqui pela letra $\boldsymbol{S}$, em negrito para não confundir com o S de intervalo entre dois eventos), a qual possui um valor mínimo. Além disso, ela deve ser um invariante para uma transformação de Lorentz. Tal integral tem a forma

$$\boldsymbol{S} = -\alpha \int_a^b dS, \tag{2.12}$$

onde α é uma constante caracterizando a partícula.

A ação também pode ser calculada por uma integral com relação ao tempo:

$$\boldsymbol{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \tag{2.13}$$

Onde o coeficiente L é a *Função Lagrangeana* da partícula ou do sistema de partículas. O sentido físico da ação pode ser interpretado como o impulso de uma força durante determinado deslocamento S. Esta interpretação vem da análise das unidades de ação, unidades de energia (da lagrangeana) e do tempo.

Na equação (2.12) a integral $\int_a^b$ é ao longo da linha de universo da partícula livre, isto é, entre dois pontos particulares de evento (a posição inicial e final da partícula definidas nos tempos t_1 e t_2).

Sabe-se que

$$dS = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt,$$

onde v é a velocidade da partícula. Substituindo em (2.12):

$$\boldsymbol{S} = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

comparando com (2.13) verifica-se que a Lagrangeana da partícula é

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Para se conhecer por completo a Lagrangeana da partícula, e, portanto, seu estado de movimento em um tempo posterior, precisa-se ainda saber qual a forma que α possui. Para isso, já se sabe que

$$L = -\alpha c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

para valores de $v \ll c$, pode-se escrever expandindo o termo entre parênteses

$$L = -\alpha c \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \cdots\right).$$

Desprezando os termos que possuem expoente superior a 2, pois seus valores são muito pequenos comparados aos dois primeiros termos da expansão tem-se

$$L \approx -\alpha c + \frac{\alpha c}{2}\frac{v^2}{c^2} = -\alpha c + \frac{\alpha}{2}\frac{v^2}{c}. \tag{2.14}$$

Os termos constantes da Lagrangeana não afetam a equação de movimento da partícula ou do sistema de partículas e podem ser omitidos. Omitindo αc de L e comparando com a forma clássica da energia cinética[4] ($L = \frac{mv^2}{2}$) percebe-se sem problemas que

$$m = \frac{\alpha}{c} \Longrightarrow \alpha = mc.$$

Agora pode-se escrever a equação (2.12) assim:

$$\boldsymbol{S} = -mc \int_a^b dS \tag{2.15}$$

[4] Lembrando que a Lagrangeana de uma partícula é dada por $L = T - U$, e para uma partícula livre $U = 0$ ($U =$ energia potencial e $T =$ energia cinética).

e a Lagrangeana é

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

É interessante e muito útil reescrever todas essas equações, obtidas até então, na forma quadrimensional, pois a relatividade se faz num espaço de quatro dimensões. Isto é possível utilizando o princípio de Hamilton. Isto é, a variação $\delta\boldsymbol{S}$ deve ser nula

$$\delta\boldsymbol{S} = -mc\delta\int_a^b dS = 0$$

relembrando que $dS^2 = dX_u dX^u$, então

$$\delta\boldsymbol{S} = -mc\delta\int_a^b \sqrt{dX_u dX^u}\cdot\frac{dS}{dS}$$

$$\delta\boldsymbol{S} = -mc\delta\int_a^b \frac{dX_u dX^u}{dS} = -mc\int_a^b \frac{dX_u \delta dX^u}{dS}$$

$$\therefore\ \delta\boldsymbol{S} = mc\int_a^b U_u \delta dX^u$$

e daí pode-se dizer também que

$$\boldsymbol{S} = mc\int_a^b U_u dX^u \tag{2.16}$$

2.2.3. AÇÃO TETRADIMENSIONAL DE UMA CARGA QUE SE MOVE EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

A interação entre partículas pode ser descrita por meio do conceito de *campo de forças*. Ao invés de dizer que uma partícula exerce *ação* sobre outra, pode-se dizer que tal partícula *cria um campo em torno de si*; qualquer outra partícula que se encontre neste campo sofrerá a ação de uma força.

Na Mecânica Clássica, um campo não é mais do que um procedimento para descrever o fenômeno físico da interação entre partículas. Na teoria da Relatividade, devido ao caráter finito da velocidade de propagação das interações, se uma força atua sobre algumas partículas em um determinado ponto do espaço num certo instante, ao mudar-se a posição de uma delas, isso vai se refletir sobre outras após certo tempo.

Já não se pode mais falar em interação direta entre partículas que se encontram em determinada distância. A interação ocorre unicamente entre pontos contínuos do espaço. Por isso, deve-se falar em interação entre uma partícula e o campo e deste com outra partícula.

A ação de uma partícula que se move em um campo eletromagnético é constituída de duas partes: a ação de uma partícula livre, descrita pela equação (2.15), e também a ação que define a interação da partícula com o campo. Esta última deve conter informações que caracterizem tanto a partícula quanto o campo.

As propriedades da partícula relacionadas com o campo eletromagnético são dadas por um único parâmetro “e”, que nada mais é do que sua carga elétrica e pode ser positiva, negativa ou nula. As propriedades que caracterizam o campo são representadas por um tetravetor A_u, que é o tetrapotencial escalar, cujas componentes são funções das coordenadas espaciais e também da temporal. A ação é então obtida de forma qualitativa relacionando as quantidades acima e ajustando as unidades de medidas para as unidades nas quais a ação é definida. Portanto, diz-se que a expressão

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_u\, dX^u \tag{2.17}$$

representa a ação que define a interação eletromagnética da partícula com o campo e vale ressaltar que ela foi comprovada com dados experimentais.

Logo, a ação de uma carga em um campo eletromagnético na forma tetradimensional tem a expressão:

$$\boldsymbol{S} = -mc\int_a^b dS - \frac{e}{c}\int_a^b A_u\, dX^u$$

$$\boldsymbol{S} = \int_a^b \left(-mcdS - \frac{e}{c}A_u dX^u\right) \tag{2.18}$$

As três componentes espaciais do tetravetor A_u formam um vetor tridimensional $\vec{A}$ que é chamado **potencial vetor** do campo. A componente temporal recebe o nome de **potencial escalar**, logo

$$A^u = \left(\varphi, \vec{A}\right). \tag{2.19}$$

CAPÍTULO III

3. TENSOR DE CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Agora neste capítulo, será obtido, a partir das equações anteriores, o tensor de campo eletromagnético e algumas propriedades dessa importante ferramenta matemática serão observadas.

3.1. EQUAÇÃO TETRADIMENSIONAL DE UMA CARGA EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO DO PONTO DE VISTA CLÁSSICO RELATIVÍSTICA

Aplicando o princípio da mínima ação à equação (2.18) e omitindo os índices de integração para abreviar a notação:

$$\boldsymbol{S} = \int_a^b (-mcdS - \frac{e}{c} A_u dX^u)$$

$$\boldsymbol{S} = -mc \int_a^b dS - \frac{e}{c} \int_a^b A_u \, dX^u$$

$$\delta\boldsymbol{S} = -mc \int \delta dS - \frac{e}{c} \int \delta(A_u dX^u)$$

considerando (2.16),

$$\delta\boldsymbol{S} = -mc \int U_u \delta dX^u - \frac{e}{c} \int dX^u \delta A_u - \frac{e}{c} \int A_u \delta X^u$$

como o tetrapotencial é uma função também das coordenadas espaciais, isto é, $A_u = A_u(X^v)$ pode-se fazer:

$$\delta\boldsymbol{S} = -mc \int U_u \delta dX^u - \frac{e}{c} \int dX^u \frac{\partial A_u}{\partial X^v} \delta X^v - \frac{e}{c} \int A_u \delta X^u$$

$$\delta\boldsymbol{S} = \int \left(-mcU_u - \frac{e}{c} A_u\right) \delta dX^u - \frac{e}{c} \int \delta X^v \frac{\partial A_u}{\partial X^v} dX^u$$

resolvendo inicialmente a primeira integral por partes:

$$I=\int_a^b\left(-mcU_u-\frac{e}{c}A_u\right)\delta dX^u$$

identificando $u=-mcU_u-\frac{e}{c}A_u \Longrightarrow du=-mcdU_u-\frac{e}{c}dA_u$ e $dv=\delta dX^u=d\delta X^u \Longrightarrow v=\delta X^u$

$$I=\left(-mcU_u-\frac{e}{c}A_u\right)(\delta X^u)_a^b-\int_a^b\delta X^u\left(-mcdU_u-\frac{e}{c}dA_u\right)$$

$$\therefore I=\int_a^b\delta X^u\left(mcdU_u+\frac{e}{c}dA_u\right)$$

pois $(\delta X^u)_a^b=0$.

$$\therefore \delta\boldsymbol{S}=\int\left(mcdU_u+\frac{e}{c}dA_u\right)\delta X^u-\frac{e}{c}\int\delta X^v\frac{\partial A_u}{\partial X^v}dX^u$$

rearmando:

$$\delta\boldsymbol{S}=mc\int dU_u\,\delta X^u-\frac{e}{c}\int\delta X^v\frac{\partial A_u}{\partial X^v}dX^u+\frac{e}{c}\int dA_u\delta X^u$$

mas como $A_u=A_u(X^v)\rightarrow dA_u=\frac{\partial A_u}{\partial X^v}dX^v$, pode-se escrever:

$$\delta\boldsymbol{S}=mc\int dU_u\,\delta X^u-\frac{e}{c}\int\delta X^v\frac{\partial A_u}{\partial X^v}dX^u+\frac{e}{c}\int dX^v\frac{\partial A_u}{\partial X^v}\delta X^u$$
$$=\int\left(mcdU_u\delta X^u+\frac{e}{c}dX^v\frac{\partial A_u}{\partial X^v}\delta X^u-\frac{e}{c}\delta X^v\frac{\partial A_u}{\partial X^v}dX^u\right)$$
$$=\int\left(mc\frac{dU_u}{dS}dS\delta X^u+\frac{e}{c}\frac{\partial A_u}{\partial X^v}dX^v\delta X^u-\frac{e}{c}\frac{\partial A_u}{\partial X^v}dX^u\delta X^v\right)$$

mas pode-se escrever

$$U^v=\frac{dX^v}{dS}\Rightarrow dX^v=U^vdS$$
$$U^u=\frac{dX^u}{dS}\Rightarrow dX^u=U^udS$$

$$\therefore \delta\boldsymbol{S}=\int\left(mc\frac{dU_u}{dS}dS\delta X^u+\frac{e}{c}\frac{\partial A_u}{\partial X^v}U^vdS\delta X^u-\frac{e}{c}\frac{\partial A_u}{\partial X^v}U^udS\delta X^v\right)$$
$$=\int\left(mc\frac{dU_u}{dS}\delta X^u+\frac{e}{c}\frac{\partial A_u}{\partial X^v}U^v\delta X^u-\frac{e}{c}\frac{\partial A_u}{\partial X^v}U^u\delta X^v\right)dS.$$

Os índices u e v podem ser permutados, pois se tratam dos chamados índices mudos e não causam nenhum problema se permutados.

$$\therefore \delta\boldsymbol{S} = \int \left(mc \frac{dU_u}{dS} \delta X^u + \frac{e}{c} \frac{\partial A_u}{\partial X^v} U^v \delta X^u - \frac{e}{c} \frac{\partial A_v}{\partial X^u} U^v \delta X^u \right) dS$$

$$\delta\boldsymbol{S} = \int \left[mc \frac{dU_u}{dS} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_u}{\partial X^v} - \frac{\partial A_v}{\partial X^u} \right) U^v \right] \delta X^u dS.$$

De acordo com o princípio da mínima ação, $\delta\boldsymbol{S} = 0$. Porém, δX^u e dS são diferentes de zero, pois representam quantidades infinitesimais e, portanto, não nulas. Então, conclui-se que o integrando deve ser nulo.

$$mc \frac{dU_u}{dS} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_u}{\partial X^v} - \frac{\partial A_v}{\partial X^u} \right) U^v = 0$$

ou

$$-mc \frac{dU_u}{dS} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_v}{\partial X^u} - \frac{\partial A_u}{\partial X^v} \right) U^v = 0$$

$$mc \frac{dU_u}{dS} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_v}{\partial X^u} - \frac{\partial A_u}{\partial X^v} \right) U^v,$$

lembrando que $\frac{dU_u}{dS} = W_u$:

$$mcW_u = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_v}{\partial X^u} - \frac{\partial A_u}{\partial X^v} \right) U^v \qquad (3.1)$$

onde:

$m = massa\ da\ partícula$
$c = velocidade\ da\ luz$
$W_u = aceleração\ quadrimensional$
$e = carga\ elétrica$
$A = potencial\ vetor\ quadrimensional$
$U = velociade\ quadrimensional$
$X = vetor\ posição\ quadrimensional$

A equação (3.1) representa a equação de movimento quadrimensional de uma partícula carregada em um campo eletromagnético.

3.2.OBTENÇÃO DO TENSOR DE CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Considerando a equação obtida anteriormente

$$mcW_u = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_v}{\partial X^u} - \frac{\partial A_u}{\partial X^v}\right)U^v,$$

é fácil verificar que ela contém informações que caracterizam a partícula, a saber: sua carga elétrica e sua massa. Vê-se também que ela contém as características (propriedades) do campo representadas pelo termo entre parênteses e que aqui neste trabalho será denotado por F_{uv}:

$$F_{uv} = \frac{\partial A_v}{\partial X^u} - \frac{\partial A_u}{\partial X^v} \tag{3.2}$$

e essa quantidade é chamada *tensor de campo eletromagnético*.

Este tensor é do tipo anti-simétrico, isto é,

$$F_{uv} = -F_{vu}$$

e como todo tensor pode ser escrito em forma de matriz com o número de linhas e colunas de acordo com as dimensões do espaço considerado, este tensor de campo eletromagnético pode ser escrito como uma matriz 4 X 4. Além disso, por ser anti-simétrico, todos os elementos da diagonal principal devem ser nulos, pois não se pode ter, por exemplo, $F_{00} = -F_{00}$.

$$F_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Agora, pode-se determinar quais são as componentes de F_{uv}. Para isso, basta considerar as equações (3.2) e (2.19) como se segue:

Primeiramente para a componente F_{01}:

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial X^0} - \frac{\partial A_0}{\partial X^1},$$

mas $A_u = (\varphi, -\vec{A}) = (A_0, -A_1, -A_2, -A_3) = (\varphi, A_x, A_y, A_z)$ e $X^u = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (ct, x, y, z)$.

Então

$$A_0 = \varphi \Longrightarrow \partial A_0 = \partial\varphi$$
$$-A_1 = A_x \Longrightarrow -\partial A_1 = \partial A_x$$
$$X^0 = ct \Longrightarrow \partial X^0 = c\partial t$$
$$X^1 = x \Longrightarrow \partial X^1 = \partial x$$

isto significa que se pode escrever a igualdade acima como:

$$F_{01} = -\frac{\partial A_x}{c\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x$$
$$\therefore \boxed{F_{01} = E_x}.$$

Onde E_x é a componente x do campo elétrico.

A forma $-\frac{\partial A_x}{c\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x$ é uma identidade que pode ser obtida de dois pares de equações de Maxwell.

- Para a componente F_{12}:

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial X^1} - \frac{\partial A_1}{\partial X^2}$$
$$= -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}$$
$$= -\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) = -H_z$$
$$\therefore \boxed{F_{12} = -H_z}.$$

Onde H_z é a componente z do campo magnético.

- Para a componente F_{02}:

$$F_{02} = \frac{\partial A_2}{\partial X^0} - \frac{\partial A_0}{\partial X^2}$$
$$= -\frac{\partial A_y}{c\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_y$$
$$\therefore \boxed{F_{02} = E_y}.$$

Onde E_y é a componente y do campo elétrico.

- Para a componente F_{03}:

$$F_{03} = \frac{\partial A_3}{\partial X^0} - \frac{\partial A_0}{\partial X^3}$$

$$= -\frac{\partial A_z}{c\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_z$$

$$\therefore \boxed{F_{03} = E_z}.$$

Onde E_z é a componente z do campo elétrico.

- Para a componente F_{10}:

$$F_{10} = \frac{\partial A_0}{\partial X^1} - \frac{\partial A_1}{\partial X^0}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{c\partial t} = -E_x$$

$$\therefore \boxed{F_{10} = -E_x}.$$

- Para a componente F_{13}:

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial X^1} - \frac{\partial A_1}{\partial X^3}$$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = H_y$$

$$\therefore \boxed{F_{13} = H_y}.$$

- Para a componente F_{20}:

$$F_{20} = \frac{\partial A_0}{\partial X^2} - \frac{\partial A_2}{\partial X^0}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{c\partial t} = -E_y$$

$$\therefore \boxed{F_{20} = -E_y}.$$

- Para a componente F_{21}:

$$F_{21} = \frac{\partial A_1}{\partial X^2} - \frac{\partial A_2}{\partial X^1}$$

$$= -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} = H_z$$

$$\therefore \boxed{F_{21} = H_z}.$$

- Para a componente F_{23}:

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial X^2} - \frac{\partial A_2}{\partial X^3}$$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -H_x$$

$$\therefore \boxed{F_{23} = -H_x}.$$

- Para a componente F_{30}:

$$F_{30} = \frac{\partial A_0}{\partial X^3} - \frac{\partial A_3}{\partial X^0}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{c\partial t} = -E_z$$

$$\therefore \boxed{F_{30} = -E_z}.$$

- Para a componente F_{31}:

$$F_{31} = \frac{\partial A_1}{\partial X^3} - \frac{\partial A_3}{\partial X^1}$$

$$= -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} = -H_y$$

$$\therefore \boxed{F_{31} = -H_y}.$$

- Para a componente F_{32}:

$$F_{32} = \frac{\partial A_2}{\partial X^3} - \frac{\partial A_3}{\partial X^2}$$

$$= -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} = H_x$$

$$\therefore \boxed{F_{32} = H_x}.$$

Estes resultados possibilitam a construção da *matriz do tensor de campo eletromagnético* como se segue:

$$F_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.4)$$

Por sua vez, a matriz que representa o tensor com suas componentes *contravariantes* se difere apenas no sinal de seus elementos devido à elevação dos índices. Assim:

$$F^{uv} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

De modo geral, podem-se escrever as equações (3.4) e (3.5) da seguinte forma:

$$F_{uv} = \left(\vec{E}, \vec{H}\right) \text{ e } F^{uv} = \left(-\vec{E}, \vec{H}\right).$$

E qual o sentido dessas equações? Elas significam que os campos elétricos e magnéticos são componentes dos quadritensores de campo eletromagnético. Ressalta-se ainda que a equação (3.1) pode ser escrita na forma:

$$mcW_u = \frac{e}{c} F_{uv} U^v$$

$$-mcW^u = -\frac{e}{c} F_{uv} U_v$$

CAPÍTULO IV

4. RESULTADOS

Agora, como já se tem o tensor de campo eletromagnético e já se conhece sua forma matricial, pode-se aplicar a Transformação de Lorentz para se conhecer qual a forma do tensor em um sistema inercial.

4.1. TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ PARA O TENSOR DE CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Neste capítulo, aborda-se o problema de como encontrar um campo eletromagnético em um sistema de coordenadas inercial conhecendo-se esse campo em outro sistema de referência.

Já se sabe, das considerações anteriores, que

$$F'_{uv} = F'_u F'_v,$$

que nada mais é do que o produto de dois tensores.

Lembrando a consideração feita anteriormente de que um vetor tetradimensional sofre a seguinte transformação:

$$A'_u = \lambda_u^v A_v$$

onde λ_u^v é a Transformação de Lorentz. Isto é, pode-se dizer que as componentes do tensor sofrem uma transformação da mesma forma:

$$F'_u = \lambda_u^i F_i$$
$$F'_v = \lambda_v^k F_k$$

Logo,

$$F'_{uv} = \lambda_u^i \lambda_v^k F_i F_k$$

$$F'_{uv} = \lambda_u^i \lambda_v^k F_{ik} \tag{4.1}$$

Vale lembrar que aqui está sendo empregada a notação de Einstein (convenção de Einstein), isto é, o sinal de somatório pode ser omitido quando se tem dois índices repetidos. Isto implica dizer que na equação (4.1) há uma soma dos diferentes termos $\lambda_u^i \lambda_v^k F_{ik}$, na qual os índices "$i$" e "$k$" variam de 0 a 3 para cada valor da componente $F_{uv}^{'}$.

A equação (4.1) já representa a transformação de Lorentz para o tensor de campo eletromagnético. Veja como se dá o desenvolvimento de uma componente de $F_{uv}^{'}$, primeiramente para componente $F_{01}^{'}$:

$$\begin{aligned} F_{01}^{'} = {} & \lambda_0^0 \lambda_1^0 F_{00} + \lambda_0^0 \lambda_1^1 F_{01} + \lambda_0^0 \lambda_1^2 F_{02} + \lambda_0^0 \lambda_1^3 F_{03} + \lambda_0^1 \lambda_1^0 F_{10} + \lambda_0^1 \lambda_1^1 F_{11} + \lambda_0^1 \lambda_1^2 F_{12} \\ & + \lambda_0^1 \lambda_1^3 F_{13} + \lambda_0^2 \lambda_1^0 F_{20} + \lambda_0^2 \lambda_1^1 F_{21} + \lambda_0^2 \lambda_1^2 F_{22} + \lambda_0^2 \lambda_1^3 F_{23} + \lambda_0^3 \lambda_1^0 F_{30} + \lambda_0^3 \lambda_1^1 F_{31} \\ & + \lambda_0^3 \lambda_1^2 F_{32} + \lambda_0^3 \lambda_1^3 F_{33}. \end{aligned}$$

Lembrando que $F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$, pois se trata de um tensor anti-simétrico. Além disso, tendo em vista que

$$\lambda_u^v = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

observa-se que

$$\lambda_0^0 = \lambda_1^1 = \gamma$$

$$\lambda_2^2 = \lambda_3^3 = 1$$

$$\lambda_0^1 = \lambda_1^0 = \gamma\beta$$

e os demais são nulos. Daí pode-se concluir que para a componente $F_{01}^{'}$ tem-se:

$$F_{01}^{'} = \lambda_0^0 \lambda_1^1 F_{01} + \lambda_0^1 \lambda_1^0 F_{10}$$
$$F_{01}^{'} = \gamma^2 E_x - \gamma^2 \beta^2 E_x.$$

Porém, se

$$F'_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ -E'_x & 0 & -H'_z & H'_y \\ -E'_y & H'_z & 0 & -H'_x \\ -E'_z & -H'_y & H'_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$F'_{01} = E'_x$$

$$F'_{01} = \gamma^2 E_x - \gamma^2 \beta^2 E_x$$
$$E'_x = \gamma^2 E_x (1 - \beta^2)$$
$$E'_x = \frac{\gamma^2}{\gamma^2} E_x$$

$$\therefore \boxed{E'_x = E_x} \tag{4.3}$$

isto quer dizer que

$$F'_{01} = F_{01}. \tag{4.4}$$

Agora, calculando as demais componentes de modo análogo:

- $F'_{02} = \lambda_0^0 \lambda_2^0 F_{00} + \lambda_0^0 \lambda_2^1 F_{01} + \lambda_0^0 \lambda_2^2 F_{02} + \lambda_0^0 \lambda_2^3 F_{03} + \lambda_0^1 \lambda_2^0 F_{10} + \lambda_0^1 \lambda_2^1 F_{11} + \lambda_0^1 \lambda_2^2 F_{12} + \lambda_0^1 \lambda_2^3 F_{13} + \lambda_0^2 \lambda_2^0 F_{20} + \lambda_0^2 \lambda_2^1 F_{21} + \lambda_0^2 \lambda_2^2 F_{22} + \lambda_0^2 \lambda_2^3 F_{23} + \lambda_0^3 \lambda_2^0 F_{30} + \lambda_0^3 \lambda_2^1 F_{31} + \lambda_0^3 \lambda_2^2 F_{32} + \lambda_0^3 \lambda_2^3 F_{33}.$

O que resulta:

$$F'_{02} = \lambda_0^0 \lambda_2^2 F_{02} + \lambda_0^1 \lambda_2^2 F_{12}$$
$$F'_{02} = \gamma E_y - \gamma \beta H_z$$
$$F'_{02} = \gamma \left(E_y - \beta H_z \right)$$
$$F'_{02} = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mas como $F'_{02} = E'_y$, implica que:

$$\boxed{E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{4.5}$$

e também,

$$F'_{02} = \frac{F_{02} + \beta F_{12}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.6}$$

- $F_{03}^{'} = \lambda_0^0\lambda_3^0F_{00} + \lambda_0^0\lambda_3^1F_{01} + \lambda_0^0\lambda_3^2F_{02} + \lambda_0^0\lambda_3^3F_{03} + \lambda_0^1\lambda_3^0F_{10} + \lambda_0^1\lambda_3^1F_{11} + \lambda_0^1\lambda_3^2F_{12} + \lambda_0^1\lambda_3^3F_{13} + \lambda_0^2\lambda_3^0F_{20} + \lambda_0^2\lambda_3^1F_{21} + \lambda_0^2\lambda_3^2F_{22} + \lambda_0^2\lambda_3^3F_{23} + \lambda_0^3\lambda_3^0F_{30} + \lambda_0^3\lambda_3^1F_{31} + \lambda_0^3\lambda_3^2F_{32} + \lambda_0^3\lambda_3^3F_{33}$.

O que resulta:

$$F_{03}^{'} = \lambda_0^0\lambda_3^3F_{03} + \lambda_0^1\lambda_3^3F_{13}$$
$$F_{03}^{'} = \gamma E_z + \gamma\beta H_y$$
$$F_{03}^{'} = \gamma\left(E_z + \beta H_y\right)$$
$$F_{03}^{'} = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mas como $F_{03}^{'} = E_z^{'}$, implica que:

$$\boxed{E_z^{'} = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{4.7}$$

e também,

$$F_{03}^{'} = \frac{F_{03} + \beta F_{13}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.8}$$

- $F_{10}^{'} = \lambda_1^0\lambda_0^0F_{00} + \lambda_1^0\lambda_0^1F_{01} + \lambda_1^0\lambda_0^2F_{02} + \lambda_1^0\lambda_0^3F_{03} + \lambda_1^1\lambda_0^0F_{10} + \lambda_1^1\lambda_0^1F_{11} + \lambda_1^1\lambda_0^2F_{12} + \lambda_1^1\lambda_0^3F_{13} + \lambda_1^2\lambda_0^0F_{20} + \lambda_1^2\lambda_0^1F_{21} + \lambda_1^2\lambda_0^2F_{22} + \lambda_1^2\lambda_0^3F_{23} + \lambda_1^3\lambda_0^0F_{30} + \lambda_1^3\lambda_0^1F_{31} + \lambda_1^3\lambda_0^2F_{32} + \lambda_1^3\lambda_0^3F_{33}$.

O que resulta:

$$F_{10}^{'} = \lambda_1^0\lambda_0^1F_{01} + \lambda_1^1\lambda_0^0F_{10}$$
$$F_{10}^{'} = \gamma^2\beta^2F_{01} + \gamma^2F_{10}$$
$$F_{10}^{'} = \gamma^2(-E_x + \beta^2E_x)$$
$$F_{10}^{'} = -\gamma^2E_x(1 - \beta^2)$$

$$F_{10}^{'} = -E_x$$

mas como $F_{10}^{'} = -E_x^{'}$, implica que:

$$-E_x' = -E_x$$
$$E_x' = E_x \tag{4.9}$$

e também,

$$F_{10}' = F_{10} \tag{4.10}$$

- $F_{12}' = \lambda_1^0\lambda_2^0 F_{00} + \lambda_1^0\lambda_2^1 F_{01} + \lambda_1^0\lambda_2^2 F_{02} + \lambda_1^0\lambda_2^3 F_{03} + \lambda_1^1\lambda_2^0 F_{10} + \lambda_1^1\lambda_2^1 F_{11} + \lambda_1^1\lambda_2^2 F_{12} + \lambda_1^1\lambda_2^3 F_{13} + \lambda_1^2\lambda_2^0 F_{20} + \lambda_1^2\lambda_2^1 F_{21} + \lambda_1^2\lambda_2^2 F_{22} + \lambda_1^2\lambda_2^3 F_{23} + \lambda_1^3\lambda_2^0 F_{30} + \lambda_1^3\lambda_2^1 F_{31} + \lambda_1^3\lambda_2^2 F_{32} + \lambda_1^3\lambda_2^3 F_{33}$.

O que resulta:

$$F_{12}' = \lambda_1^0\lambda_2^2 F_{02} + \lambda_1^1\lambda_2^2 F_{12}$$
$$F_{12}' = \gamma\beta E_y - \gamma H_z$$
$$F_{12}' = \gamma\left(\beta E_y - H_z\right)$$
$$F_{12}' = \frac{\beta E_y - H_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mas como $F_{12}' = -H_z'$, implica que:

$$\boxed{-H_z' = \frac{\beta E_y - H_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{H_z' = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{4.11}$$

e também,

$$F_{12}' = \frac{F_{21} + \beta F_{20}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.12}$$

- $F_{13}^{'} = \lambda_1^0\lambda_3^0 F_{00} + \lambda_1^0\lambda_3^1 F_{01} + \lambda_1^0\lambda_3^2 F_{02} + \lambda_1^0\lambda_3^3 F_{03} + \lambda_1^1\lambda_3^0 F_{10} + \lambda_1^1\lambda_3^1 F_{11} + \lambda_1^1\lambda_3^2 F_{12} + \lambda_1^1\lambda_3^3 F_{13} + \lambda_1^2\lambda_3^0 F_{20} + \lambda_1^2\lambda_3^1 F_{21} + \lambda_1^2\lambda_3^2 F_{22} + \lambda_1^2\lambda_3^3 F_{23} + \lambda_1^3\lambda_3^0 F_{30} + \lambda_1^3\lambda_3^1 F_{31} + \lambda_1^3\lambda_3^2 F_{32} + \lambda_1^3\lambda_3^3 F_{33}$.

O que resulta:

$$F_{13}^{'} = \lambda_1^0\lambda_3^3 F_{03} + \lambda_1^1\lambda_3^3 F_{13}$$
$$F_{13}^{'} = \gamma\beta F_{03} + \gamma F_{13}$$
$$F_{13}^{'} = \gamma\left(H_y + \beta E_z\right)$$
$$F_{13}^{'} = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mas como $F_{13}^{'} = H_y^{'}$, implica que:

$$\boxed{H_y^{'} = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{4.13}$$

e também,

$$F_{13}^{'} = \frac{F_{13} + \beta F_{03}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.14}$$

- $F_{23}^{'} = \lambda_2^0\lambda_3^0 F_{00} + \lambda_2^0\lambda_3^1 F_{01} + \lambda_2^0\lambda_3^2 F_{02} + \lambda_2^0\lambda_3^3 F_{03} + \lambda_2^1\lambda_3^0 F_{10} + \lambda_2^1\lambda_3^1 F_{11} + \lambda_2^1\lambda_3^2 F_{12} + \lambda_2^1\lambda_3^3 F_{13} + \lambda_2^2\lambda_3^0 F_{20} + \lambda_2^2\lambda_3^1 F_{21} + \lambda_2^2\lambda_3^2 F_{22} + \lambda_2^2\lambda_3^3 F_{23} + \lambda_2^3\lambda_3^0 F_{30} + \lambda_2^3\lambda_3^1 F_{31} + \lambda_2^3\lambda_3^2 F_{32} + \lambda_2^3\lambda_3^3 F_{33}$.

O que resulta:

$$F_{23}^{'} = \lambda_2^2\lambda_3^3 F_{23}$$
$$F_{23}^{'} = F_{23}$$

mas como $F_{23}^{'} = -H_x^{'}$, implica que:

$$\boxed{-H_x^{'} = -H_x}$$

$$\boxed{H_x^{'} = H_x} \tag{4.15}$$

e também,

$$F_{23}^{'} = F_{23} \tag{4.16}$$

As equações obtidas acima representam a transformação de Lorentz para o tensor de campo eletromagnético. Elas nos mostram como as componentes dos campos elétricos e magnéticos se transformam durante um movimento relativo entre dois referenciais.

NOTAS

I. Ao longo deste trabalho, está sendo considerado o movimento de um sistema de referência na direção do eixo "x". Por esta razão, os campos elétricos e magnéticos, de acordo com as equações (4.9) e (4.15), não sofrem transformação na direção "x".

II. As equações obtidas acima representam as fórmulas de transformação das componentes de um quadritensor anti-simétrico de segunda ordem.

III. A partir dos vetores campo elétrico e magnético, podem-se criar quantidades que permanecem invariantes em uma transformação de coordenadas. Como forma-se uma quantidade invariante, só pode ser um escalar; e como se trata da combinação de grandezas tetradimensionais, esta quantidade é, pois, chamada escalar tetradimensional e é obtida da combinação dos tetravetores F_{uv} e F^{uv}.

$$F_{uv}F^{uv} = -E^2 + H^2 = H^2 - E^2 = invariante$$

Lembrando que $F_{uv} = (\vec{E}, \vec{H})$ e $F^{uv} = (-\vec{E}, \vec{H})$ e que o produto $F_{uv}F^{uv}$ representa o módulo quadrado de F_{uv}.

O que acontece com a quantidade $\overrightarrow{E'}.\vec{H}$?

$$\overrightarrow{E'}.\vec{H} = E_x^{'}H_x^{'} + E_y^{'}H_y^{'} + E_z^{'}H_z^{'}$$

$$= E_x.H_x + \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= E_x.H_x + \gamma^2\left[E_yH_y + \beta E_yE_z - \beta H_yH_z - \beta^2E_zH_z + E_zH_z - \beta E_yE_z + \beta H_yH_z - \beta^2E_yH_y\right]$$

$$= E_x.H_x + \gamma^2\left[E_yH_y(1-\beta^2) + E_zH_z(1-\beta^2)\right]$$

$$= E_x.H_x + E_y H_y + E_z H_z$$

$$= \vec{E}.\vec{H} = invariante$$

4.2.APLICAÇÕES

4.2.1. FORÇA DE LORENTZ DE UMA PARTÍCULA QUE SE MOVE EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO.

Considere os sistemas de referência k e $k^{'}$ e uma carga q localizada na origem do sistema $k^{'}$ como mostra a Figura 2. Pretende-se calcular a *Força de Lorentz* para essa partícula utilizando a formalidade matemática que foi apresentada até então neste trabalho.

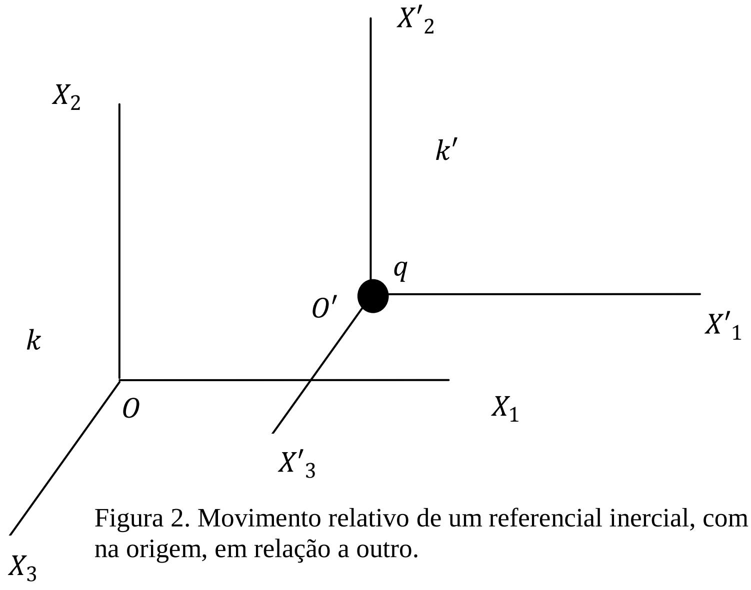

Figura 2. Movimento relativo de um referencial inercial, com uma carga na origem, em relação a outro.

Sabe-se que a força em uma carga de prova localizada no referencial k' é $\vec{F}^{'} = e\vec{E}^{'}$, pois para um observador nesse referencial a carga encontra-se em repouso. E para o referencial k? Essa pergunta será respondida da seguinte forma:

$$F_x^{'} = eE_x^{'}$$

mas já se sabe que $E_x^{'} = E_x$, então fica que a componente F_x é:

$$F_x = eE_x = eE_x^{'} = F_x^{'}$$

$$F_x = F_x^{'}$$

Neste trabalho, é abordado o tratamento quadrimensional, então a força (na verdade suas componentes) se transforma como na equação já descrita anteriormente

$$F^0 = \frac{F'^0 + \frac{v}{c}F'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{F_0 = \frac{F_0' - \frac{v}{c}F_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (a)$$

e também para a componente

$$F^1 = \frac{F'^1 + \frac{v}{c}F'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{-F_1 = \frac{-F_1' + \frac{v}{c}F_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \rightarrow \boxed{F_1 = \frac{F_1' - \frac{v}{c}F_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}. \qquad (b)$$

Agora para F^2 e F^3:

$$F^2 = F'^2 \rightarrow \boxed{F_2 = F_2'} \qquad (c)$$

$$F^3 = F'^3 \rightarrow \boxed{F_3 = F_3'} \qquad (d)$$

No referencial k' a partícula está em repouso, isto é, a velocidade relativa da carga ao referencial k' é nula, $v' = 0$, e também $F_0 = F_0' = 0$, pois não se tem nenhuma força dependente do tempo. Então, as equações (a), (b), (c) e (d) passam a ter as seguintes formas:

$$F_1 = \frac{F_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (e)$$

$$F_2 = F_2' \qquad (f)$$

$$F_3 = F_3' \qquad (g)$$

Para o sistema que se move com a carga, o sistema k', podem-se fazer as considerações:

$$F_1^{'} = F_x^{'}, F_2^{'} = F_y^{'} \text{ e } F_3^{'} = F_z^{'}.$$

Para o sistema k:

$$F_1 = \frac{F_1^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F_x^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{eE_x^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{eE_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$F_1 = \frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{h}$$

$$F_2 = F_2^{'} = eE_y^{'} = e\frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{eE_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$F_2 = \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{i}$$

Vale ressaltar que o referencial que se move com a carga não observa a parte magnética do campo.

Agora desenvolvendo para a componente F_3:

$$F_3 = F_3^{'} = eE_z^{'} = e\frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{eE_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$F_3 = \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{j}$$

Combinando as equações (h) e (e):

$$\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F_1^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F_x^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow F_x = F_x^{'}.$$

Procedendo da mesma maneira com as equações (f) e (i) e também com (g) e (j), respectivamente:

- $F_2 = \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_2' = F_y'$

$$\boxed{F_y = F_y' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- $F_3 = \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_3' = F_z'$

$$\boxed{F_z = F_z' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Estes resultados podem ser resumidos da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_x = F_x' \\ F_y = F_y' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = eE_y' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ F_z = F_z' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = eE_z' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{cases}$$

Considerando as equações de transformação de campos deduzidas anteriormente:

$$\begin{cases} F_x = eE_x \\ F_y = e\frac{\left(E_y - \beta H_z\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e\left(E_y - \frac{v}{c}H_z\right) \\ F_z = e\frac{\left(E_z + \beta H_y\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e\left(E_z + \frac{v}{c}H_y\right) \end{cases}$$

Lembrando que $\beta = {}^{v}/_{c}$. E com um pouco de análise pode-se verificar sem dificuldade que essas componentes da força podem ser agrupadas sob uma mesma equação vetorial, a qual assume a seguinte forma:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c}\right)$$

Que nada mais é do que a força de Lorentz, como era de se esperar. A soma vetorial da força elétrica ($\vec{F} = e\vec{E}$) com a força magnética ($\vec{F} = e\frac{\vec{v}\times\vec{H}}{c}$).

4.2.2. O CASO LIMITE: COMPORTAMENTO CLÁSSICO DAS EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO DO CAMPO.

Tomar o caso clássico das equações até então deduzidas significa explorar seus casos limites em que se tem a velocidade relativa entre os dois referenciais muito menor que a velocidade da luz ($v \ll c$). Para esses casos, a Mecânica Newtoniana se torna uma excelente aproximação.

As equações seguintes já foram deduzidas:

$$E_x^{'} = E_x \qquad\qquad H_x^{'} = H_x$$

$$E_y^{'} = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad\qquad H_y^{'} = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_z^{'} = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad\qquad H_z^{'} = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

com o tratamento clássico haverá grande simplificação dessas equações, pois é feita a seguinte aproximação:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \sim 1$$

se $v \ll c$. Sendo assim, as equações ficam:

$$E_x^{'} = E_x \qquad\qquad H_x^{'} = H_x$$

$$E_y^{'} = E_y - \beta H_z \qquad\qquad H_y^{'} = H_y + \beta E_z$$

$$E_z^{'} = E_z + \beta H_y \qquad\qquad H_z^{'} = H_z - \beta E_y$$

que também podem ser escritas na forma vetorial:

a) Para $\overrightarrow{E'}$:

$$\overrightarrow{E'} = E_x^{'}\hat{\imath} + E_y^{'}\hat{\jmath} + E_z^{'}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{E'} = E_x\hat{\imath} + (E_y - \beta H_z)\hat{\jmath} + (E_z + \beta H_y)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{E'} = \vec{E} + (-\beta H_z)\hat{\jmath} + (\beta H_y)\hat{k}$$

mas como

$$\vec{v} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = vH_y\hat{k} - vH_z\hat{\jmath}$$

pode-se concluir que

$$\boxed{\overrightarrow{E'} = \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c}} \tag{4.17}$$

b) Para $\overrightarrow{H'}$:

$$\overrightarrow{H'} = H_x\hat{\imath} + (H_y + \beta E_z)\hat{\jmath} + (H_z - \beta E_y)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{H'} = \vec{H} + (\beta E_z)\hat{\jmath} + (-\beta E_y)\hat{k}$$

lembrando que

$$\vec{v} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = vE_y\hat{k} - vE_z\hat{\jmath}$$

então,

$$\boxed{\overrightarrow{H'} = \vec{H} + \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c}}. \tag{4.18}$$

As duas equações em destaque fornecem a forma do vetor campo elétrico e magnético em um referencial k' em função do campo magnético e elétrico num referencial k, em movimento relativo com o referencial k' quando a velocidade relativa é muito menor que a velocidade da luz.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Uma teoria Física, além de ser capaz de explicar os fenômenos que acontecem na natureza, deve ser escrita de uma maneira matematicamente elegante. As equações de Maxwell cumprem isso perfeitamente. Para se chegar, porém, ao formalismo tensorial usado pelos físicos de todo o mundo, houve uma enorme evolução dos conceitos físicos e na forma de se representar uma lei física através de uma equação matemática. Para o caso do eletromagnetismo, os trabalhos de Poincaré e Minkowisk, e depois Einstein, foram de suma importância, pois foram os primeiros que demonstraram que as equações de Maxwell devem ser invariantes sob uma transformação de Lorentz. Seguindo as idéias iniciais deles, chegou-se, neste trabalho, ao tensor de campo eletromagnético e na sua transformação. Isto é, à transformação de Lorentz para um tensor de campo eletromagnético. O que confirmou que realmente as equações de Maxwell se comportam como uma rotação de eixos coordenados sob um ângulo imaginário e que ela se mantém invariante para uma transformação de Lorentz. Com a transformação do tensor de campo, se pode saber como são as componentes do campo eletromagnético em um sistema de referência quando se conhece essas componentes em outro sistema que se move com velocidade contate v em relação ao primeiro.

Logo, o desenvolvimento deste trabalho se mostrou muito útil, pois além de trabalhar com as equações de Maxwell na forma relativística, foram utilizadas definições matemáticas não muito comuns, nos cursos de Física de modo geral, porém de muita importância na física, como o cálculo variacional e a descrição lagrangeana da dinâmica dos corpos.

Espera-se também que os desenvolvimentos matemáticos e o raciocínio físico tenham sido expostos de maneira mais didática quando comparado aos livros. Isto para que este trabalho seja utilizado pelos acadêmicos do curso como uma ferramenta alternativa ao entendimento da transformação do campo.

Este trabalho se mostrou de grande valia para o autor do mesmo quanto aos conhecimentos adquiridos, pois é inquestionável o quanto a teoria eletromagnética é fundamental na física. Além disso, descrevê-la na forma tensorial e poder comprovar através de suas próprias deduções matemáticas as propriedades eletromagnéticas foi muito satisfatório.

REFERÊNCIAS

[1] BUTKOV. E. **Física-Matemática.** Rio de Janeiro. LTC. 1988;

[2] LANDAU; LIFSCHITZ; Vol. 1. **Mechanics**. 3Rd edition. Buttherworth Heinemann. 1987;

[3] LANDAU; LIFSCHITZ; Vol. 2. **The Classical theory of fields**. 4Rd edition. Buttherworth Heinemann. 1987;

[4] LOPES, J. L. **Do átomo pré-socrático à teoria da relatividade**. Rio de Janeiro, CBPF. 1998. Disponível em <ftp://ftp2.biblioteca.cbpf.br/pub/apub/1998/cs/cs_zip/cs01898.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2009;

[5] MARION; THORNTON. **Classical dynamics of particles and systems.** 5Rd edition. Thomson. (198?);

[6] MARTINS. R. Espaço, tempo e éter na teoria da relatividade. **Pesquisa FAPESP**. São Paulo, 18 out. de 2008. Disponível em <http://www.revistapesquisa.fapesp.br/pdf/einstein/martins.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2009;

[7] RENN, J. **A física clássica de cabeça para baixo:** como Einstein descobriu a teoria da relatividade especial. **Revista brasileira de ensino de física**, v. 27, n. 1, p. 27 - 36, (2004). Disponível em: < http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/renn.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2009;

[8] SILVA, C. C. **Da força ao tensor**: a evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético**. Teses virtuais.** Campinas, Disponível em <http://webbif.ifi.unicamp.br/teses/index.php>. Acesso 01 jun. 2009;

APÊNDICE A

A.1. VETORES QUADRIDIMENSIONAIS

Vetor quadridimensional A^u é o conjunto de quatro quantidades A^0, A^1, A^2, A^3 que, nas transformações de coordenadas, se transformam segundo as relações:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c}A'^1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}};\ A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c}A'^0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}};\ A^2 = A'^2;\ A^3 = A'^3$$

Estas relações podem ser obtidas da seguinte forma:

É sabido que

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

e

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Pode-se escrever estas equações suprimindo os índices:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (A.1.1)$$

e

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (A.1.2)$$

De $(A.1.1)$:

$$x=\frac{x^{'}+\frac{v}{c}(ct^{'})}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}\Longrightarrow \boxed{x=\frac{x^{'}+\frac{v}{c}\left(x^{'0}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}} \qquad (A.1.3)$$

Onde definiu-se que $x^{'0}=ct^{'}$.

Agora de $(A.2)$ obtém-se:

$$t=\frac{t^{'}+\frac{v}{c^{2}}x^{'}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}\Longrightarrow ct=\frac{ct^{'}+\frac{v}{c}x^{'}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}$$

$$\boxed{x^{0}=\frac{x'^{0}+\frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}} \qquad (A.1.4)$$

Comparando estas expressões destacadas com as escritas acima no início do apêndice verifica-se que realmente

$$A^{0}=\frac{A'^{0}+\frac{v}{c}A'^{1}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}};\ A^{1}=\frac{A'^{1}+\frac{v}{c}A'^{0}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}};\ A^{2}=A'^{2};\ A^{3}=A'^{3}$$

Nas quais se chamou $A^{0}=x^{0}$, $A'^{0}=x'^{0}$, $A^{1}=x$ e $A'^{1}=x^{'}$.

APÊNDICE B

B.1. EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Considere um ponto P com coordenadas $P(x_1, x_2, x_3)$ no sistema de referência (x_1, x_2, x_3) na figura, na qual o eixo X_3 está perpendicular ao plano do papel. Quais seriam as coordenadas desse ponto P se fosse realizada uma rotação de um ângulo θ no sistema de referência em torno do eixo X_3? As novas coordenadas seriam denotadas por $P(x'_1, x'_2, x'_3)$, mas como obter essas medidas a partir das coordenadas antigas? É o que será feito a seguir.

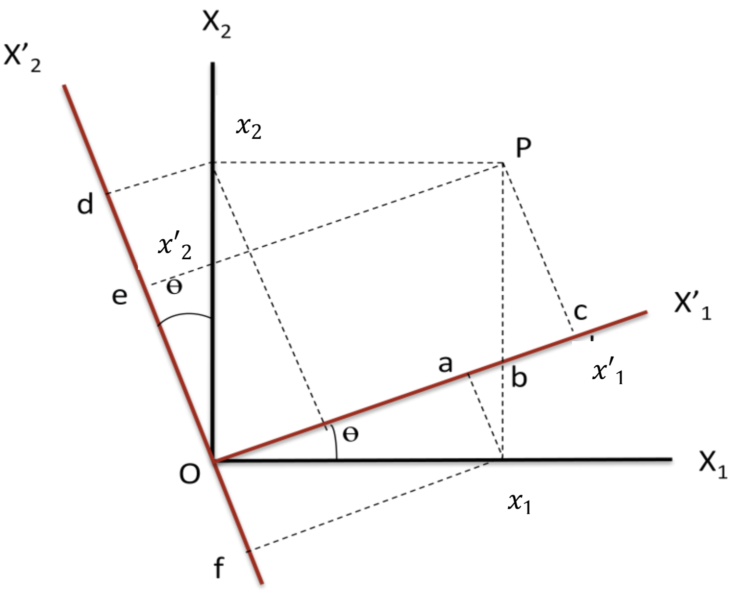

Figura 3. Rotação dos eixos coordenados de um sistema de referência sob determinado ângulo.

$$P(x_1, x_2, x_3) \rightarrow P(x'_1, x'_2, x'_3)$$

Primeiramente, da Figura 3 se pode tirar que

$$x'_1 = \overline{Oa} + \overline{ab} + \overline{bc},$$
$$\overline{Oa} = x_1 \cos\theta$$

E que

$$\overline{x_1 P} = \overline{x_1 b} + \overline{bP} = x_2$$

Porém,

$$\overline{ab} = \overline{x_1 b} \sin\theta$$

$$\overline{bc} = \overline{bP} \sin\theta$$

Então fica que

$$\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{x_1 b} \sin\theta + \overline{bP} \sin\theta$$
$$\overline{ab} + \overline{bc} = \left(\overline{x_1 b} + \overline{bP}\right) \sin\theta$$
$$\overline{ab} + \overline{bc} = x_2 \sin\theta$$

$$\therefore x'_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$

$$\boxed{x'_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \qquad B.1.1$$

Que é a primeira equação de transformação de coordenadas. Para obter o valor de x'_2:

$$\overline{Oe} = x'_2 = \overline{Od} - \overline{de}$$

Onde

$$\overline{Od} = x_2 \cos\theta$$

Observando que

$$\overline{x_2 P} = x_1$$

Tem-se

$$\overline{de} = \overline{x_2 P} \sin\theta$$
$$\overline{de} = x_1 \sin\theta$$

Logo,

$$x'_2 = x_2 \cos\theta - x_1 \sin\theta$$

$$-\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\boxed{x'_2 = x_2 \cos\theta + x_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} \qquad B.1.2$$

Denota-se por $\lambda_{ij} = \cos\left(x'_i, x_j\right)$ o cosseno diretor do ângulo formado entre o eixo x'_i com o eixo x_j. Dessa forma,

$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos\theta$$
$$\lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$
$$\lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos\theta$$

Pode-se então reescrever as equações de transformação de coordenadas obtidas anteriormente da seguinte forma:

$$x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2$$

$$x'_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2$$

Generalizando para 3-D:

$$x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3$$
$$x'_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3$$
$$x'_3 = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3$$

De onde se pode tirar as matrizes: $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$X' = \Lambda X$$

Ou escrevendo de forma mais geral:

$$\boxed{x'_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}\, x_j\,, \quad i = 1, 2, 3.} \qquad B.1.3$$

E a transformação inversa fica:

$$\boxed{x_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ji}\, x'_i\,, \quad i = 1, 2, 3.} \qquad B.1.4$$

B.2. PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE ROTAÇÃO

Considere determinado segmento de reta em uma certa direção do espaço, como na Figura 4. Observa-se que:

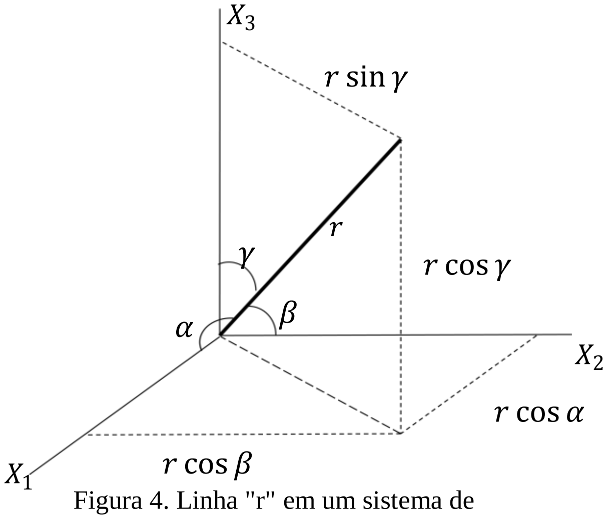

Figura 4. Linha "r" em um sistema de coordenadas.

$$r^2 = r^2\cos^2\gamma + r^2\sin^2\gamma,$$

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$$

$$r^2\sin^2\gamma = r^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\beta$$

$$1 - \cos^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1} \qquad B.2.5$$

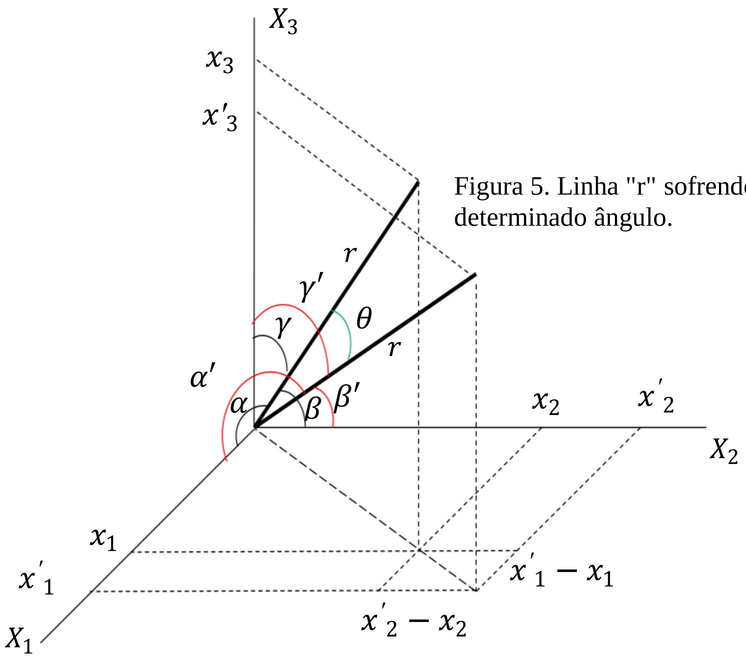

Figura 5. Linha "r" sofrendo uma rotação sob determinado ângulo.

Agora, considere a mesma linha “r” sofrendo uma rotação em torno da origem sob um ângulo θ. Da Figura 5 é fácil perceber que

$$\theta = \gamma' - \gamma$$

Então, $\cos\theta = \cos(\gamma' - \gamma)$.

$$\boxed{\cos\theta = \cos\gamma' \cos\gamma + \sin\gamma' \sin\gamma} \qquad B.2.6$$

Identificando

$$x_1 = r\cos\alpha$$
$$x'_1 = r\cos\alpha'$$
$$x_2 = r\cos\beta$$
$$x'_2 = r\cos\beta'$$
$$x_3 = r\cos\gamma$$
$$x'_3 = r\cos\gamma'$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$r^2(\sin\gamma' - \sin\gamma)^2 = r^2(\cos\alpha' - \cos\alpha)^2 + r^2(\cos\beta' - \cos\beta)^2$$

$$\sin^2\gamma' - 2\sin\gamma' \sin\gamma + \sin^2\gamma =$$
$$= \cos^2\alpha' - 2\cos^2\alpha' \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\beta'$$
$$- 2\cos^2\beta' \cos^2\beta + \cos^2\beta$$

$$\boxed{\sin\gamma' \sin\gamma = \cos\alpha' \cos\alpha + \cos\beta' \cos\beta}$$

$$\boxed{\cos\theta = \cos\alpha' \cos\alpha + \cos\beta' \cos\beta + \cos\gamma' \cos\gamma} \qquad B.2.7$$

Podem-se estabelecer seis relações existentes entre os cossenos diretores λ_{ij}. Primeiramente, o eixo x'_1 pode ser considerado sozinho como uma linha no sistema (x_1, x_2, x_3), cujos cossenos diretores são $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13})$. Similarmente, os cossenos diretores com o eixo x'_2 são $(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23})$. Da equação deduzida acima:

$$\cos\theta = \underbrace{\cos\alpha' \cos\alpha}_{\lambda_{21}\lambda_{11}} + \underbrace{\cos\beta' \cos\beta}_{\lambda_{22}\lambda_{12}} + \underbrace{\cos\gamma' \cos\gamma}_{\lambda_{23}\lambda_{13}}$$

$$\cos\theta = \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{13}\lambda_{23}$$

como a análise se faz para os eixos x'_1e x'_2 que são perpendiculares entre si, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$, implica que

$$\cos\frac{\pi}{2} = \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{13}\lambda_{23} = 0$$

Ou seja

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_{1j}\lambda_{2j} = 0$$

De modo mais geral

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}\lambda_{kj} = 0\,, se\ i \neq k} \qquad B.2.8$$

Esta equação dá três (uma para cada valor de i e k) das seis relações existentes.

Da equação $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ pode-se tirar para o eixo x'_1do sistema (x_1, x_2, x_3) que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\lambda_{11}{}^2 + \lambda_{12}{}^2 + \lambda_{13}{}^2 = 1$$

Ou ainda:

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_{1j}{}^2 = 1$$

Ou de modo mais geral:

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_{1j}\lambda_{1j} = 1$$

Ou melhor

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}\lambda_{kj} = 1\,, se\ i = k} \qquad B.2.9$$

Que são as outras três relações das seis citadas.

Estes resultados podem ser combinados para gerar a chamada condição de ortogonalidade, a função Delta de Kronecker.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik}} \qquad B.2.10$$

Onde

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, se\ i \neq k \\ 1, se\ i = k \end{cases} \qquad B.2.11$$

B.3. SIGNIFICAÇÃO GEOMÉTRICA DAS MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO

Considere o eixo coordenado da Figura 6 rodado no sentido anti-horário sob um ângulo de 90°.

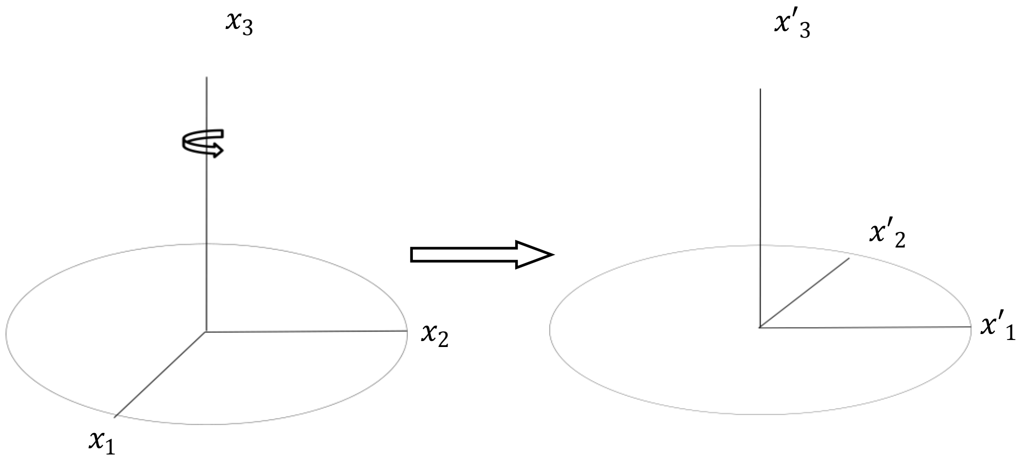

Figura 6. Rotação de 90° sobre o eixo $\boldsymbol{x_3}$.

Em tal rotação, $x'_1 = x_2$; $x'_2 = -x_1$; $x'_3 = x_3$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = 0; & \lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = 1; & \lambda_{13} = \cos(x'_1, x_3) = 0; \\ \lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = -1; & \lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = 0; & \lambda_{23} = \cos(x'_2, x_3) = 0; \\ \lambda_{31} = \cos(x'_3, x_1) = 0; & \lambda_{32} = \cos(x'_3, x_2) = 0; & \lambda_{33} = \cos(x'_3, x_3) = 1. \end{array}$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A próxima consideração é uma rotação no sentido anti-horário através do ângulo de 90° sobre o eixo x_1. Como na Figura 7:

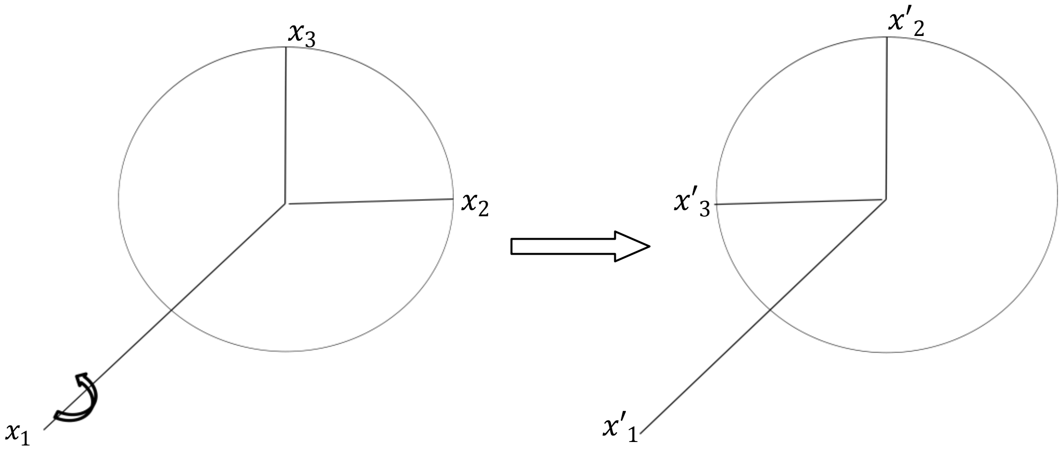

Figura 7. Rotação de 90° sobre o eixo$\boldsymbol{x_1}$.

Em tal rotação, $x'_1 = x_1$; $x'_2 = x_3$; $x'_3 = -x_2$

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \cos(x'_1, x_1) = 1; & \lambda_{12} &= \cos(x'_1, x_2) = 0; & \lambda_{13} &= \cos(x'_1, x_3) = 0; \\ \lambda_{21} &= \cos(x'_2, x_1) = 0; & \lambda_{22} &= \cos(x'_2, x_2) = 0; & \lambda_{23} &= \cos(x'_2, x_3) = 1; \\ \lambda_{31} &= \cos(x'_3, x_1) = 0; & \lambda_{32} &= \cos(x'_3, x_2) = -1; & \lambda_{33} &= \cos(x'_3, x_3) = 0. \end{aligned}$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar a matriz de transformação que combina a rotação cobre o eixo x_3 seguida por uma rotação sobre o novo eixo x'_1, tem-se:

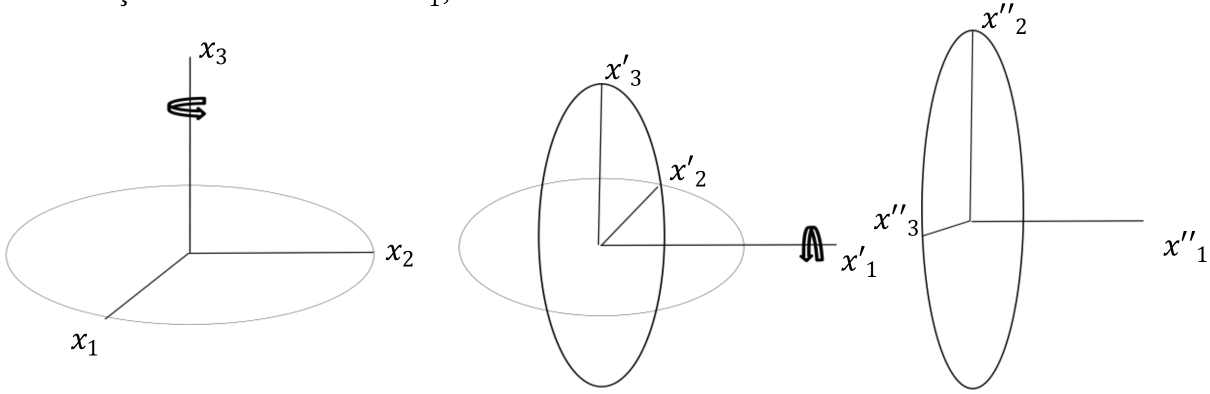

Figura 8. Aplicação de duas rotações seguidas dos eixos coordenados.

$$X' = \Lambda_1 \mathrm{X}$$

$$X'' = \Lambda_2 \mathrm{X}' = \Lambda_2 \Lambda_1 \mathrm{X}$$

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}}$$

Como último exemplo de matrizes de transformação será abordado uma reflexão através da origem de todos os eixos, como na Figura 9. Tal transformação é chamada de *inversão*.

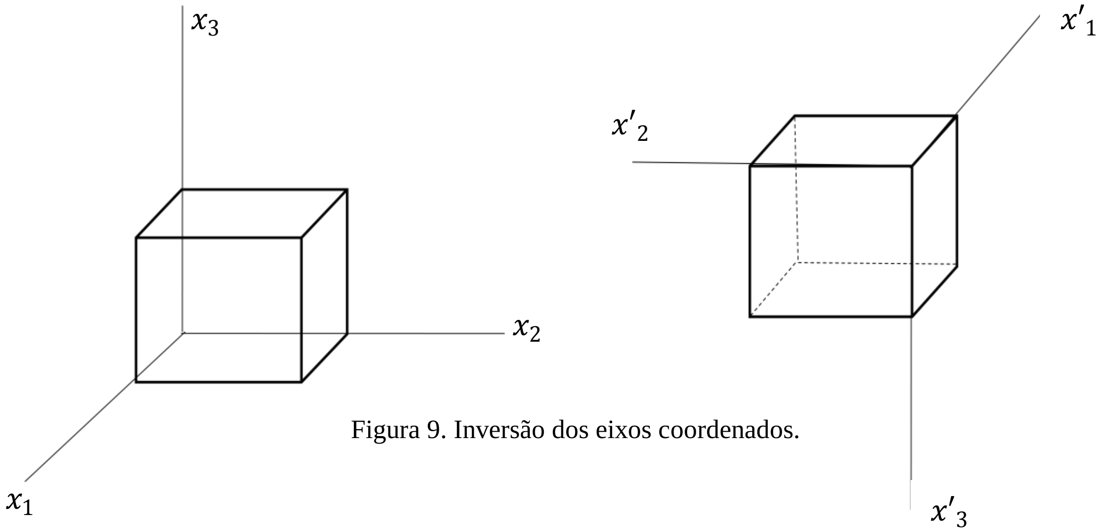

Figura 9. Inversão dos eixos coordenados.

$$x'_1 = -x_1$$
$$x'_2 = -x_2$$
$$x'_3 = -x_3$$

Então se tem a matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

APÊNDICE C

C.1. A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Considere os dois sistemas de coordenadas da figura k e k' em movimento relativo com velocidade v na direção do eixo x_1.

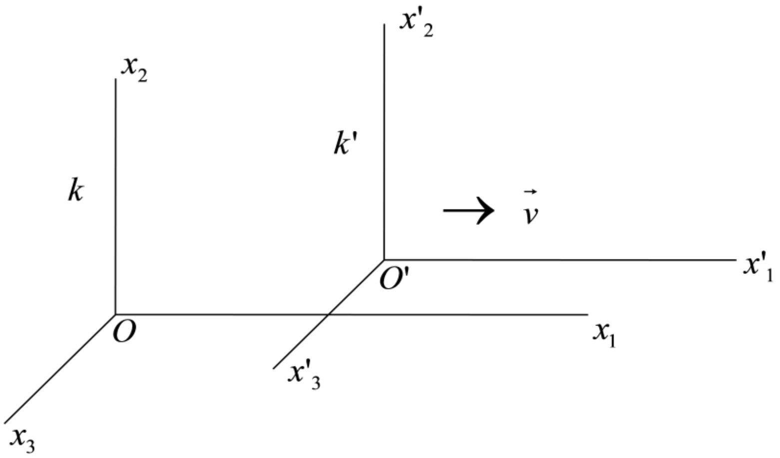

Figura 10. Movimento relativo de dois sistemas de coordenadas.

Pela transformação de Galileu têm-se as equações:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - bt \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ t' = t \end{cases}$$

Porém, como se sabe, estas equações de transformação de coordenadas são incorretas. Precisa-se então encontrar novas equações que descrevam de maneira correta a transformação de coordenadas do sistema k' para o sistema k e vice-versa.

Do apêndice B, sabe-se que toda transformação de coordenadas pode expressa por uma matriz e pode ser representada pela equação:

$$X' = \Lambda X,$$

onde X' e X são as matrizes que expressam as coordenadas dos sistemas k' e k, respectivamente; Λ é a chamada matriz de transformação. O objetivo agora é encontrar esta matriz. Como o espaço-tempo possui quatro dimensões, a matriz de transformação que se quer encontrar é quadrada de ordem 4x4.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{pmatrix} \qquad C.1.1$$

Lembrando do apêndice B $\lambda_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$, então se tem:

$$\lambda_{11} = ?$$

$$\lambda_{12} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lambda_{13} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lambda_{14} = ?$$

$$\lambda_{21} = 0$$

$$\lambda_{22} = \cos 0° = 1$$

$$\lambda_{23} = 0$$

$$\lambda_{24} = 0$$

$$\lambda_{31} = 0$$

$$\lambda_{32} = 0$$

$$\lambda_{33} = 1$$

$$\lambda_{34} = 0$$

$$\lambda_{41} = ?$$

$$\lambda_{42} = 0$$

$$\lambda_{43} = 0$$

$$\lambda_{44} = ?$$

Os elementos de matriz λ_{24} e λ_{34} não estão relacionados (acoplados) com o tempo, por isso que possuem como valor 0. Falta apenas encontrar os valores de $\lambda_{11}, \lambda_{14}, \lambda_{41}, \lambda_{44}$ cujos valores não puderam ser inferidos, pois esses elementos estão relacionados com a direção em que o movimento ocorre e com o tempo, então essas quantidades sofrem transformação.

$$\therefore \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & \lambda_{44} \end{pmatrix} \qquad C.1.2$$

E como se trata de uma transformação ortogonal,

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_{ij}\lambda_{ik} = \delta_{ik}.$$

- Para o caso em que $i = k$, isto é, $\delta_{ik} = 1$:

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{14}^2 = \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_{24}^2 = \lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 + \lambda_{33}^2 + \lambda_{34}^2$$
$$= \lambda_{41}^2 + \lambda_{42}^2 + \lambda_{43}^2 + \lambda_{44}^2 = 1$$

$$\therefore \lambda_{11}^2 + \lambda_{14}^2 = \lambda_{41}^2 + \lambda_{44}^2 = 1 \qquad C.1.3$$

- Para o caso em que $i \neq k$, isto é, $\delta_{ik} = 0$:

$$\lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{11}\lambda_{31} + \lambda_{11}\lambda_{41} + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{12}\lambda_{32} + \lambda_{12}\lambda_{42} + \lambda_{13}\lambda_{23} + \lambda_{13}\lambda_{33} + \lambda_{13}\lambda_{43} + \lambda_{14}\lambda_{24} + \lambda_{14}\lambda_{34} + \lambda_{14}\lambda_{44} = 0$$

$$\therefore \lambda_{11}\lambda_{41} + \lambda_{14}\lambda_{44} = 0 \qquad C.1.4$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{ij}\, x_j$$

Tem-se:

$$x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 + \lambda_{14}x_4$$

$$x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{14}x_4 \qquad C.1.5$$

Mas da definição de intervalo entre dois pontos:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2dt^2$$

$$dx_4^2 = -c^2dt^2 \Rightarrow x_4^2 = -c^2t^2 \Rightarrow x_4 = ict \qquad C.1.6$$

Substituindo $C.1.6$ em $C.1.5$ tem-se:

$$x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{14}ict$$

$$x'_1 = \lambda_{11}\left(x_1 + \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}}ict\right) \qquad C.1.7$$

Se $x'_1 = 0$, significa que $x_1 = vt$, ou seja, a origem de k' está se movendo com velocidade v constante ao longo do eixo x_1:

$$x'_1 = x_1 - vt, x'_1 = 0 \Rightarrow x_1 = vt \qquad C.1.8$$

Mas se $x'_1 = 0$, $C.1.7$ fica:

$$x'_1 = \lambda_{11}\left(x_1 + \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}}ict\right) = 0$$

$$x_1 = -\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}}ict \qquad C.1.9$$

Comparando $C.1.9$ e $C.1.8$ vem que

$$-\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}} ic = v$$

$$\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}} = i\frac{v}{c} = i\beta \qquad C.1.10$$

De $C.1.3$ tem-se:

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{14}^2 = 1$$
$$\lambda_{11}^2\left(1 + \frac{\lambda_{14}^2}{\lambda_{11}^2}\right) = 1$$
$$\lambda_{11}^2(1 + (i\beta)^2) = 1$$

$$\lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \qquad C.1.11$$

Ainda de $C.1.3$:

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{14}^2 = \lambda_{41}^2 + \lambda_{44}^2$$

$$\lambda_{11}^2\left(1 + \frac{\lambda_{14}^2}{\lambda_{11}^2}\right) = \lambda_{44}^2\left(1 + \frac{\lambda_{41}^2}{\lambda_{44}^2}\right)$$

$$\lambda_{11}^2 = \lambda_{44}^2 \Rightarrow \boxed{\lambda_{44} = \pm\lambda_{11}}$$

e

$$\frac{\lambda_{14}^2}{\lambda_{11}^2} = \frac{\lambda_{41}^2}{\lambda_{44}^2} \Rightarrow \boxed{\lambda_{14} = \pm\lambda_{41}}$$

$$\therefore \lambda_{44} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \pm\gamma \qquad C.1.12$$

Agora, de $C.1.11$ em $C.1.3$:

$$\frac{1}{1-\beta^2} + \lambda_{14}^2 = 1 \Rightarrow \lambda_{14}^2 = 1 - \frac{1}{1-\beta^2} = -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

$$\lambda_{14} = i\beta\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = i\beta\gamma \qquad C.1.13$$

Então,

$$\lambda_{41} = \pm i\beta\gamma \qquad C.1.14$$

O problema agora é escolher o sinal adequado para as equações $C.1.14$, e $C.1.12$. Pode-se fazer isso levando em conta que

$$x'_i = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{ij}\, x_j$$

$$x'_4 = \lambda_{41}x_1 + \lambda_{42}x_2 + \lambda_{43}x_3 + \lambda_{44}x_4$$
$$x'_4 = \lambda_{41}x_1 + \lambda_{44}x_4$$

Se levando em conta que $x'_4 = ict'$ e $x_4 = ict$

$$\therefore ict' = \lambda_{41}x_1 + \lambda_{44}ict \qquad C.1.15$$

De $C.1.12$, se $v = 0$, implica que as duas origens estão se movendo juntas, isso quer dizer que $t' = t$ e $x_1 = x'_1 = 0$. Logo,

$$ict = \lambda_{41}x_1 + \lambda_{44}ict$$
$$ict = \lambda_{44}ict$$

$$\therefore \lambda_{44} = +1$$

Então,

$$\lambda_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma = \lambda_{11} \qquad C.1.16$$

De $C.1.4$, tem-se:

$$\lambda_{11}\lambda_{41} + \lambda_{14}\lambda_{44} = 0$$
$$\lambda_{11}\lambda_{41} = -\lambda_{14}\lambda_{44}$$

Levando em conta o resultado anterior, tem-se

$$\lambda_{41} = -\lambda_{14}$$

$$\therefore \lambda_{41} = -i\beta\gamma \qquad C.1.17$$

Pode-se agora, então, escrever a matriz que representa a nova transformação de coordenadas em substituição à transformação de Galileu:

$$\boxed{\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}} \qquad C.1.18$$

Lembrando que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e que $\beta = \frac{v}{c}$.

Agora, observando a equação $C.1.7$ e todos os resultados anteriores:

$$x'_1 = \lambda_{11}\left(x_1 + \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}}ict\right)$$
$$x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{14}ict$$
$$x'_1 = \gamma x_1 + (i\beta\gamma)ict$$
$$\boxed{x'_1 = \gamma(x_1 - vt)}$$

De $C.1.15$:

$$ict' = \lambda_{41}x_1 + \lambda_{44}ict$$
$$ict' = (-i\beta\gamma)x_1 + \gamma ict$$
$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x_1\right)}$$

E também,

$$\boxed{x'_2 = x_2}$$
$$\boxed{x'_3 = x_3}$$

Combinando todas estas últimas equações destacadas obtêm-se as coordenadas do espaço-tempo do sistema k'. E são na verdade as equações da transformação de Lorentz.

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$
$$x'_2 = x_2$$
$$x'_3 = x_3$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x_1\right).$$